Bu kitaba sığmayan daha neler var!

Karekodu okut, bu kitapla ilgili EBA içeriklerine ulaş!



BU DERS KİTABI MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞINCA ÜCRETSİZ OLARAK VERİLMİŞTİR. PARA İLE SATILAMAZ.

ORTAÖĞRETİM MATEMATİK 11 DERS KİTABI

ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK

DERS KİTABI



ANKA KUŞU yayınevi

ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK

11

DERS KİTABI

Bu kitap, Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı'nın 18.04.2019 tarih ve 8 sayılı (ekli listenin 185'inci sırasında) kurul kararıyla 2019-2020 öğretim yılından itibaren 5 (beş) yıl süreyle ders kitabı olarak kabul edilmiştir.

YAZAR

Mehmet Hanefi ALTUN

ANKA KUŞU yayınevi

ISBN
978-605-74477-7-7

Dil Uzmanı
Necla ŞANAL

Görsel Tasarım Uzmanı
Aysel GÜNEY TÜRKEÇ

Kavacık Subayevleri Mah. Fahrettin Altay Cad. No.: 4/5 Keçiören/ANKARA

tel.: (0.312) 318 0 318 • belgegeçer: (0.312) 318 0 318



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

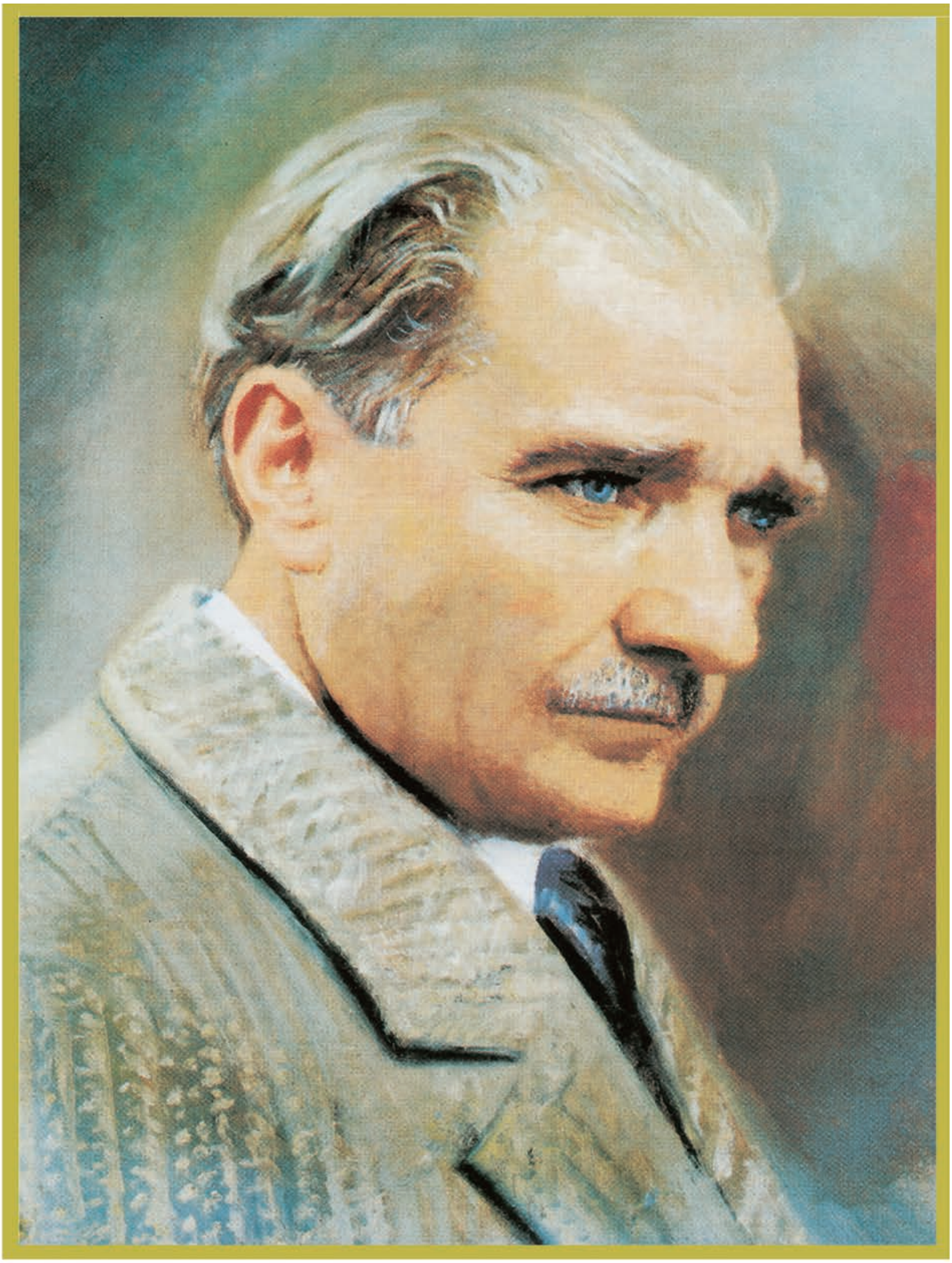
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

SAYILAR VE CEBİR

GEOMETRİ

ORGANİZASYON ŞEMASI




Konuya girişte dikkat çekmek amacıyla verilen, konunun günlük hayatta nerelerde kullanıldığını açıklayan, konu ile ilgili ön bilgileri ortaya çıkaran veya işlenişin devamında konu ile ilgili ön plana çıkmış matematikçileri tanıtan bölümdür.

Deney yaparak hesaplanan olasılık değerine **deneysel olasılık** denir.

Konu ile ilgili tanım, özellik ve özet bilgilerin verildiği bölümdür.

Bir üçgenin ağırlık merkezi, kenarortayların kesim noktasıdır.

Konu ile ilgili teorem ve özelliklerin ispatının bulunduğu bölümdür.

ETKİNLİK

Aşağıdaki tabloda sol sütunda bulunan ifadelerin her birinin eşitini sağ sütunda bularak örnekteki gibi eşleştiriniz.

Konunun keşfettirilmesi veya uygulanması amacıyla verilen etkinliklerin bulunduğu bölümdür.

Örnek

Çözüm

İşlenişle ilgili verilen örneklerin çözümlerinin bulunduğu bölümdür.

Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak fonksiyon giriş alanına cotx yazalım. Aşağıdaki grafik elde edilir.

Grafik çizimlerinde bilişim teknolojilerinden yararlanılan bölümlerdir.

SONUÇ

Orijinden geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi, $y = mx$ tir.

Etkinliklerin ya da verilen örneklerin devamında elde edilen çıkarımların bulunduğu bölümdür.

Bir noktanın bir doğruya uzaklığı, nokta ile doğru arasındaki en kısa mesafedir.

İşlenişte dikkat edilmesi gerekenler ve uyarıların verildiği bölümdür.

y yalnız bırakıldığında x in katsayısının eğime eşit olduğuna dikkat ediniz.

Örnek çözümlerini kolaylaştırmak amacıyla verilen kısa yol göstermeler veya hatırlatmaların bulunduğu bölümdür.



İşlemlerde hesap makinesi kullanılabileceğini belirten görsel öğedir.

UYGULAYALIM 1-1

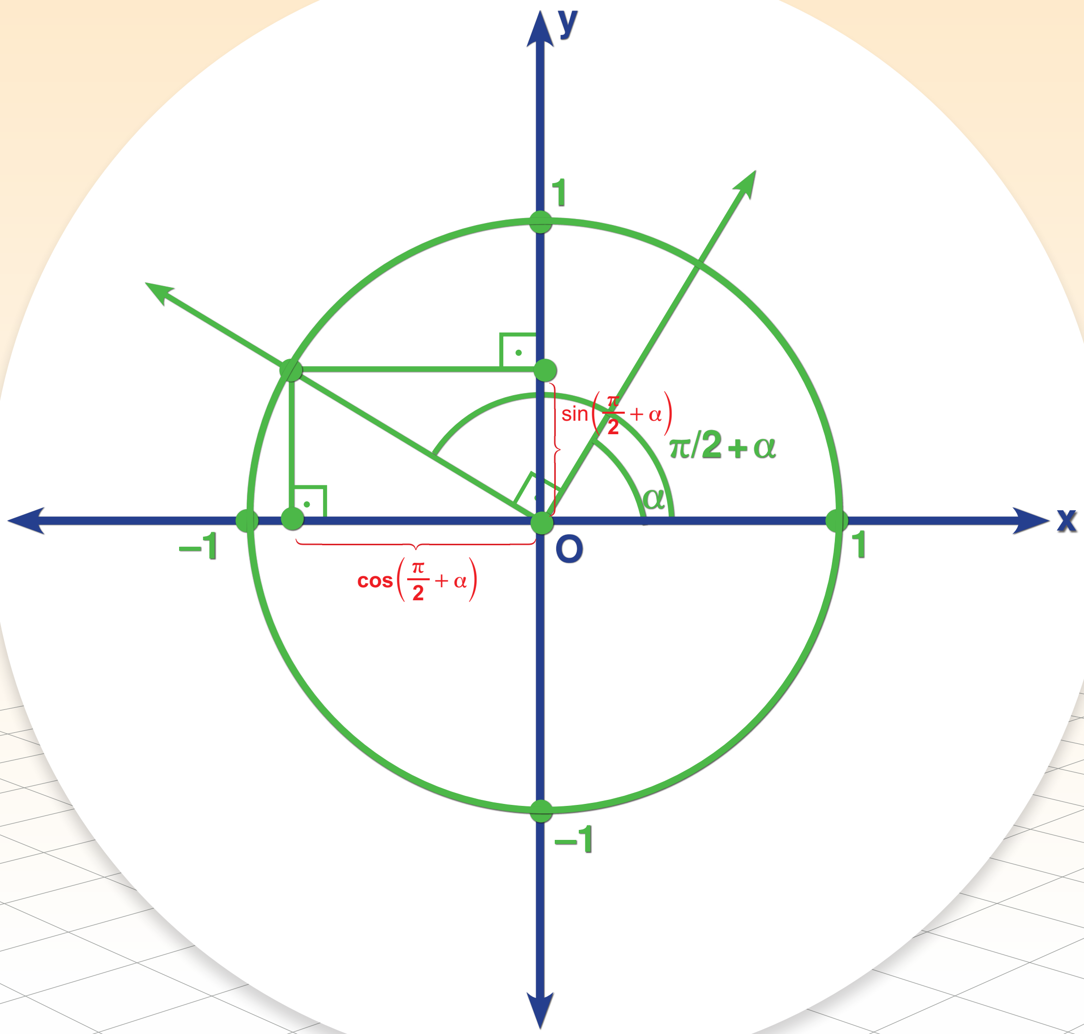
Bir veya birkaç işlenişin sonunda verilen pekiştirme sorularının verildiği bölümdür.

1. DEĞERLENDİRME SORULARI

Her bölümün sonunda verilen değerlendirme sorularının bulunduğu bölümdür.

1. TRİGONOMETRİ

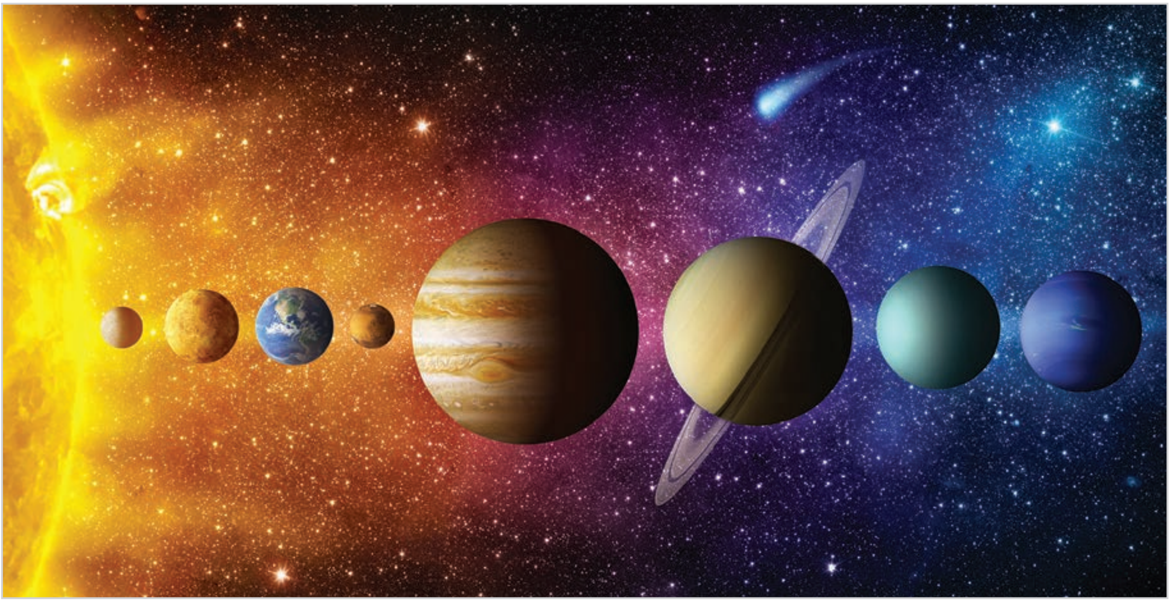
1. TRİGONOMETRİ
   1.1. YÖNLÜ AÇILAR
   1.2. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR



17. yy.da cebirsel gösterimlerle matematiğe giren trigonometrinin kökeni oldukça eskidir. Trigonometri MÖ 2000-3000'li yıllarda hesaplamalarda kullanılmaya başlanmıştır. Mezopotamya'da Babilliler, daireyi astronomi bilimi ile ilgili olarak 60'a bölmüşler, bir yılda 360 gün olduğunu hesaplamışlardır. Mevsimlerin tekrarı da bu periyot içinde gerçekleşir.







Eski Mısır'da trigonometriden yararlanılmıştır.

Thales (Tales), ölçümlerinde trigonometriden yararlanmıştır.

Trigonometri; jeofizik, ekonomi, elektrik mühendisliği, elektronik, makine mühendisliği, meteoroloji, müzik kuramı, sayı kuramı (ve dolayısıyla kriptografi), oşinografi (okyanus bilimi), farmakoloji (eczacılık), optik, fonetik, olasılık kuramı, psikoloji, sismoloji vb. alanlarda kullanılmaktadır. Birçok kişi tarafından sadece matematikte hesaplama olarak görülen trigonometrinin uygulamaları astronomide görülmekle beraber fizikte de uçak yapımı ve uçakların yol alışları gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Günümüzde dünya harikaları arasında sıralanan Mısır Piramitleri ve Pisa Kulesi'nin yapımında da trigonometriden faydalanılmıştır. Ayrıca meridyenler ve uzay hesaplamalarında da trigonometriden yararlanılmaktadır.

Ana Britannica Ansiklopedisi

1.1. YÖNLÜ AÇILAR

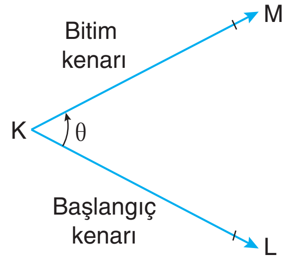
1.1.1. Yönlü Açı

Bir yönlü açı, başlangıç noktaları ortak iki ışından birinin sabit tutularak diğer ışının başlangıç noktası etrafında döndürülmesiyle oluşturulur.

Bir açı, kenarlarının söyleniş sırasına göre yönlendirilir.

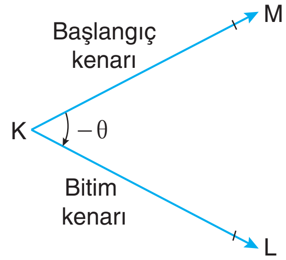
Yandaki şekilde verilen açı KL ışınından KM ışınına doğru yönlendirilmiştir. Bu yön bir ok ile belirtilmiştir. Bu açının yönü saatin akrep ve yelkovanının hareket yönü ile terstir. Bu yöne **pozitif yön** denir.

Bu açı $\widehat{LKM}$ şeklinde gösterilir.



Yandaki şekilde verilen açı, KM ışınından KL ışınına doğru yönlendirilmiştir. Bu yön ok ile belirtilmiştir. Bu açının yönü saatin akrep ve yelkovanının hareket yönü ile aynıdır. Bu yöne **negatif yön** denir.

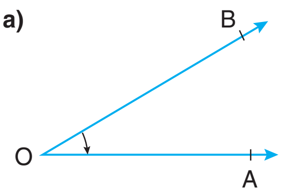
Bu açı $\widehat{MKL}$ şeklinde gösterilir.



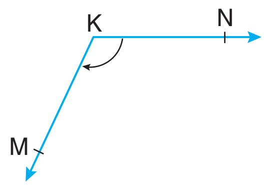
Örnek

Aşağıda verilen açıların yönlerini, başlangıç ve bitim kenarlarını, açılarını sembollerle gösterelim.

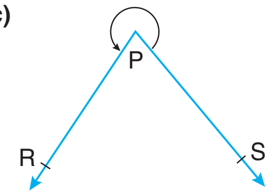
a)



b)



c)



Çözüm

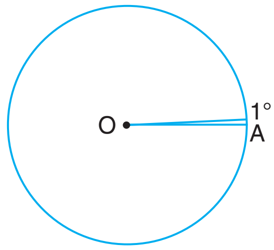
a) Saatin dönme yönünün aynısı olduğundan açı negatif yönlüdür.
Başlangıç kenarı: [OB; bitim kenarı: [OA; açı: $\widehat{BOA}$ dır.

b) Saatin dönme yönünün aynısı olduğundan açı negatif yönlüdür.
Başlangıç kenarı: [KN; bitim kenarı: [KM; açı: $\widehat{NKM}$ dır.

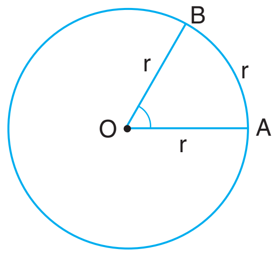
c) Saatin dönme yönünün tersi olduğundan açı pozitif yönlüdür.
Başlangıç kenarı: [PS; bitim kenarı: [PR; açı: $\widehat{SPR}$ dır.

1.1.2. Açı Ölçü Birimleri

Derece: Bir tam çember yayının 360 eş parçasından birini gören merkez açının ölçüsüne **1 derece** denir. 1° şeklinde gösterilir.



Radyan: Bir tam çemberin yarıçapına eşit uzunluktaki yayını gören merkez açının ölçü birimine **radyan** denir. Bir tam çemberin ölçüsü 2π radyandır. 1 radyan, 1^R, 1R ve 1 rad şeklinde gösterilir.



Bir açının derece cinsinden ölçüsü D ve radyan cinsinden ölçüsü R olmak üzere bir tam çember 360° veya 2π radyan olduğundan

$\frac{D}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi}$ veya $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ dir.

Örnek

Ölçüsü 60° ve 150° olan açıların radyan cinsinden eşitini bulalım.

Çözüm

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

$$R \cdot 180^\circ = 60^\circ \cdot \pi$$

$$\frac{R \cdot \cancel{180^\circ}}{\cancel{180^\circ}} = \frac{\cancel{60^\circ}^{1} \cdot \pi}{\cancel{180^\circ}_{3}}$$

$$R = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{150^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R \cdot 180^\circ = 150^\circ \cdot \pi$$

$$\frac{R \cdot \cancel{180^\circ}}{\cancel{180^\circ}} = \frac{\cancel{150^\circ}^{5} \cdot \pi}{\cancel{180^\circ}_{6}}$$

$$R = \frac{5\pi}{6}$$

Örnek

Ölçüsü $\frac{\pi}{6}$ ve $\frac{3\pi}{10}$ olan açıların derece cinsinden eşitini bulalım.

Çözüm

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{1}{6}$$

$$D = 30^\circ$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{3\pi}{10}}{\pi}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{3}{10}$$

$$D = \frac{540}{10} \Rightarrow D = 54^\circ$$

1 derecenin $\frac{1}{60}$ ine 1 **dakika** denir. 1 dakika, 1′ ile gösterilir.

$1° = 60′$ (Bir derece 60 dakikadır.) 1 dakikanın $\frac{1}{60}$ ine 1 **saniye** denir. 1 saniye 1″ ile gösterilir. $1° = 60′ = 3600″$dir.

ETKİNLİK

Aşağıdaki tabloda derece cinsinden verilen bazı açı ölçüleri dakikaya, dakika cinsinden verilen bazı açı ölçüleri dereceye dönüştürülmüştür. Diğer dönüşümleri siz yapınız.

Derece/Dakika	Yapılan işlem	Sonuç
128°	$128 \cdot 60 = 7680$	7680′
256°		
7560′	$7560 : 60 = 126$	126°
1440′		
5760′		
365°		

Örnek

1856′lık bir açı ölçüsünü derece ve dakika cinsinden yazalım.

Çözüm

1 derece 60 dakikaya eşit olduğundan 1856 dakikayı 60 a bölmeliyiz. Buna göre

$$\begin{array}{r|l} 1856 & 60 \\ \hline -180 & 30 \\ \hline 56 & \end{array}$$

olduğundan $1856′ = 30°\ 56′$ bulunur.

Örnek

3812″ lik bir açı ölçüsünü derece, dakika ve saniye cinsinden ifade edelim.

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 3812 & 3600 \\ \cline{2-2} -3600 & 1 \text{ derece} \\ \hline 212 \text{ saniye} & \end{array} \qquad 3812'' = 1^\circ\, 212''$$

$$\begin{array}{r|l} 212 & 60 \\ \cline{2-2} -180 & 3 \text{ dakika} \\ \hline 32 \text{ saniye} & \end{array} \qquad 212'' = 3'\, 32''$$

Buradan $3812'' = 1^\circ\, 3'\, 32''$ olur.

Örnek

$m(\widehat{A}) = 30^\circ\ 43'$ ve $m(\widehat{B}) = 22^\circ\ 55'$ açı ölçüleri verildiğine göre

a) $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})$ **b)** $m(\widehat{A}) - m(\widehat{B})$ **c)** $3 \cdot m(\widehat{B})$

işlemlerinin sonuçlarını bulalım.

Çözüm

a)

$$\begin{array}{lr} & m(\widehat{A}) = 30^\circ\ 43' \\ + & m(\widehat{B}) = 22^\circ\ 55' \\ \hline \end{array}$$

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 52^\circ\ 98'$

$= 53^\circ\ 38'$ (98′ nın 60′lık kısmı 1° olarak 52°ye ilave edildi.)

b)

$$\begin{array}{lr} & m(\widehat{A}) = 30^\circ\ 43' \\ - & m(\widehat{B}) = 22^\circ\ 55' \\ \hline \end{array}$$

43′dan 55′ çıkarılamayacağına göre 30°nin 1°lik kısmını 43′ya ilave edelim. Buna göre

$$\begin{array}{lr} & m(\widehat{A}) = 29^\circ\ 103' \quad (1^\circ = 60') \\ - & m(\widehat{B}) = 22^\circ\ 55' \\ \hline \end{array}$$

$m(\widehat{A}) - m(\widehat{B}) = 7^\circ\ 48'$ elde edilir.

c) Derece ve dakikayı ayrı ayrı 3 ile çarpalım.

$3 \cdot m(\widehat{B}) = 3 \cdot (22^\circ\ 55') = 66^\circ\ 165'$ olur. 165′nın 120′lık kısmını 2° olarak 66°ye ilave edersek

$3 \cdot m(\widehat{B}) = 68^\circ\ 45'$ olur.

Örnek

28° 12′ 24″ açı ölçüsünden 12° 25′ 42″ açı ölçüsünü çıkaralım.

Çözüm

$$\begin{array}{rrr} \overset{27^\circ}{\cancel{28^\circ}} & 12' & 24'' \\ - \; 12^\circ & 25' & 42'' \\ \hline \end{array} \quad (1^\circ = 60') \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr} 27^\circ & \overset{72'}{\cancel{72'}} & 24'' \\ - \; 12^\circ & 25' & 42'' \\ \hline \end{array} \quad (1' = 60'') \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr} 27^\circ & 71' & 84'' \\ - \; 12^\circ & 25' & 42'' \\ \hline 15^\circ & 46' & 42'' \end{array}$$

28° nin 1° si 60′ olarak 12′ ya eklenir.

72′ nın 1′ sı 60″ olarak 24″ ya eklenir.

Her iki birime ait sayılar kendi aralarında çıkarılır.

Buna göre sonuç 15° 46′ 42″ olur.

Örnek

32° 25′ 16″ açı ölçüsü ile 25° 48′ 52″ açı ölçüsünü toplayalım.

Çözüm

$$\begin{array}{rrr} 32^\circ & 25' & 16'' \\ + \; 25^\circ & 48' & 52'' \\ \hline 57^\circ & 73' & 68'' \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr} 32^\circ & 25' & 16'' \\ + \; 25^\circ & 48' & 52'' \\ \hline 57^\circ & \underset{74'}{\cancel{73'}} & 68'' \end{array} \quad (60'' = 1') \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr} 32^\circ & 25' & 16'' \\ + \; 25^\circ & 48' & 52'' \\ \hline \underset{58^\circ}{\cancel{57^\circ}} & \underset{14'}{\cancel{74'}} & 68'' \end{array} \quad (60' = 1^\circ)$$

Her birime ait sayılar kendi aralarında toplanır.

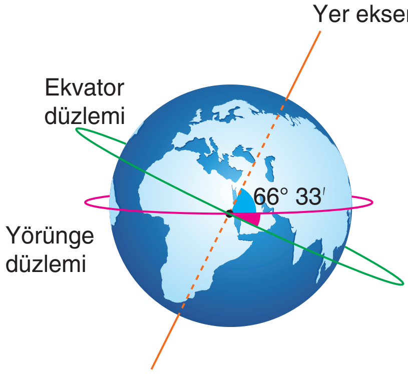
68″ nin 60″ si 1′ olarak 73′ ya eklenir.

74′ nın 60′ sı 1° olarak 57° eklenir.

Buna göre sonuç 58° 14′ 8″ olur.

Örnek

Yer ekseniyle yörünge düzlemi birbirine dik değildir. Yörünge düzlemiyle yer ekseni arasında 66° 33′lık açı vardır. Yer ekseni ile ekvator düzlemi birbirine diktir. Buna göre yörünge düzlemi ile ekvator düzlemi arasındaki açının ölçüsünü bulalım.



Çözüm

Yer ekseni ile ekvator düzlemi birbirine diktir. Buna göre yörünge düzlemi ile ekvator düzlemi arası, $90° - (66°\ 33')$ ise

$$\begin{array}{rr} 90^\circ & 00' \\ - \; 66^\circ & 33' \\ \hline \end{array}$$

90°den 1° alarak 00′ya 60′ olarak ekleyelim.

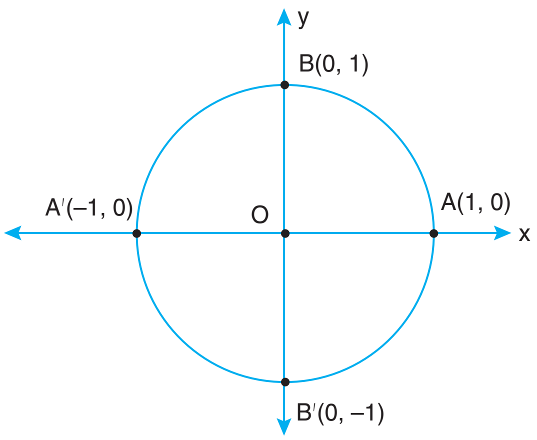
$$\begin{array}{rr} 89^\circ & 60' \\ - \; 66^\circ & 33' \\ \hline 23^\circ & 27' \end{array}$$

olur.

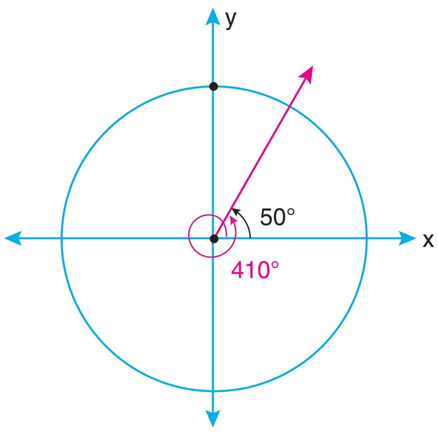
Bir Açının Esas Ölçüsü

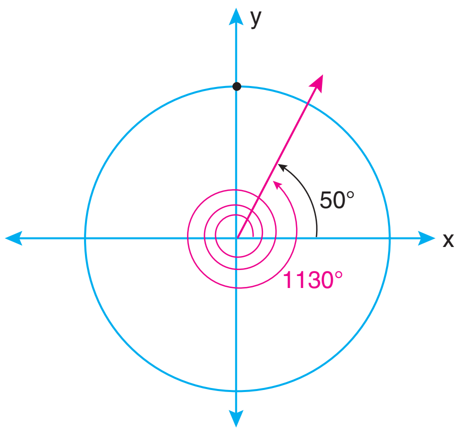
Analitik düzlemde merkezi koordinat eksenlerinin kesiştikleri nokta (orijin) ve yarıçapı 1 birim olan çembere **birim çember** denir.

Yarıçapının uzunluğu r birim olan çemberin çevresinin uzunluğu, $2 \cdot \pi \cdot r$ birim olduğundan yarıçapının uzunluğu 1 birim olan çemberin çevresinin uzunluğu $2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi$ birimdir.



Birim çember üzerinde bir açının bitiş kenarından başlayarak pozitif yönde her 360° dönme sonucunda yine aynı noktaya ulaşılır.





$k \in \mathbb{Z}$, $0° \leq \alpha < 360°$ veya $0 \leq \alpha < 2\pi$ olmak üzere

$\alpha + k \cdot 360°$ veya $\alpha + k \cdot 2\pi$ şeklindeki açıların esas ölçüsü α dır.

Örnek

1760°nin esas ölçüsünü derece cinsinden bulalım.

Çözüm

$k \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant \alpha < 360°$ olmak üzere 1760°yi $\alpha + k \cdot 360°$ şeklinde yazalım.

$$\begin{array}{r|l} 1760° & 360° \\ \hline -\,1440° & 4 \\ \hline 320° & \end{array}$$

$1760° = 320° + 4 \cdot 360°$ $(k = 4 \in \mathbb{Z})$ olduğundan 1760°nin esas ölçüsü $\alpha = 320°$dir.

Örnek

Ölçüsü $-960°$, $\frac{19\pi}{3}$ ve $-\frac{23\pi}{3}$ olan açıların esas ölçülerini radyan cinsinden bulalım.

Çözüm

$k \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant \alpha < 360°$ olmak üzere $-960°$yi $\alpha + k \cdot 360°$ şeklinde yazalım.

$$\begin{array}{r|l} -960° & 360° \\ \hline -\,-1080° & -3 \\ \hline 120° & \end{array}$$

$-960° = 120° - 3 \cdot 360°$ $(k = -3 \in \mathbb{Z})$ olduğundan $-960°$ nin esas ölçüsü $\alpha = 120°$ olur.

$\frac{D}{180°} = \frac{\mathbb{R}}{\pi} \Rightarrow \frac{120°}{180°} = \frac{\mathbb{R}}{\pi}$

$\mathbb{R} = \frac{120°\pi}{180°} = \frac{2\pi}{3}$ olduğundan $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ olur.

$k \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ olmak üzere

$\frac{19\pi}{3}$ ü $\alpha + k \cdot 2\pi$ şeklinde yazalım.

$\frac{19\pi}{3} = \frac{\pi + 18\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{18\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 6\pi = \frac{\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi$ $(k = 3 \in \mathbb{Z})$ olduğundan esas ölçü $\alpha = \frac{\pi}{3}$ olur.

$k \in \mathbb{R}$ ve $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ olmak üzere

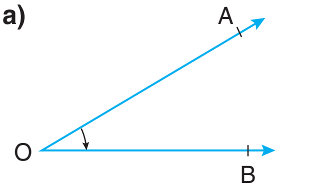
$-\frac{23\pi}{3}$ ü $\alpha + k \cdot 2\pi$ şeklinde yazalım.

$-\frac{23\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{24\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 8\pi = \frac{\pi}{3} - 4 \cdot 2\pi$ $(k = -4 \in \mathbb{R})$ olduğundan esas ölçü $\frac{\pi}{3}$ olur.

UYGULAYALIM 1-1

1. Aşağıda verilmiş olan açıların yönlerini başlangıç ve bitim kenarlarını belirleyiniz.

a)

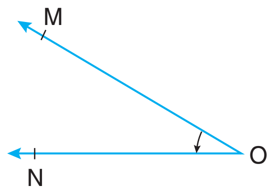


Yönü:..................................

Başlangıç kenarı:..................

Bitim kenarı:..........................

b)

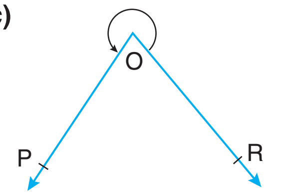


Yönü:..................................

Başlangıç kenarı:..................

Bitim kenarı:..........................

c)



Yönü:..................................

Başlangıç kenarı:..................

Bitim kenarı:..........................

2. Aşağıda, derece veya radyan cinsinden verilen açı ölçülerini birbirine dönüştürerek boş bırakılan alanlara yazınız.

Derece	$900°$		$-45°$		$2970°$	
Radyan		$\frac{5\pi}{2}$		$-\frac{7\pi}{3}$		$\frac{9\pi}{5}$

3. Aşağıda verilen açı ölçüleri ile yapılan işlemlerin sonuçlarını noktalı yerlere yazınız.

a) $25°\ 32' + 48°\ 72' =$..............................

b) $19°\ 32' - 8°\ 47' =$.................................

c) $2\cdot(9°\ 12') + 3\cdot(15°\ 24') =$....................

4. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) = \frac{2\pi}{5}$ radyan ve $m(\widehat{A}) - m(\widehat{C}) = 20°$ olduğuna göre C açısının ölçüsü kaç derecedir?

5. Aşağıda verilen açı ölçüleri ile yapılan işlemleri yapınız.

$$\begin{array}{r} 52°\ \ 18'\ \ \ 5'' \\ -\ \ 24°\ \ 32'\ \ 16'' \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 52°\ \ 18'\ \ \ 5'' \\ +\ \ 24°\ \ 32'\ \ 16'' \\ \hline \end{array}$$

6. Bir ABC üçgeninde A açısının ölçüsü $35°\ 26'$ ve B açısının ölçüsü $42°\ 54'$ olduğuna göre C açısının ölçüsünü bulunuz.

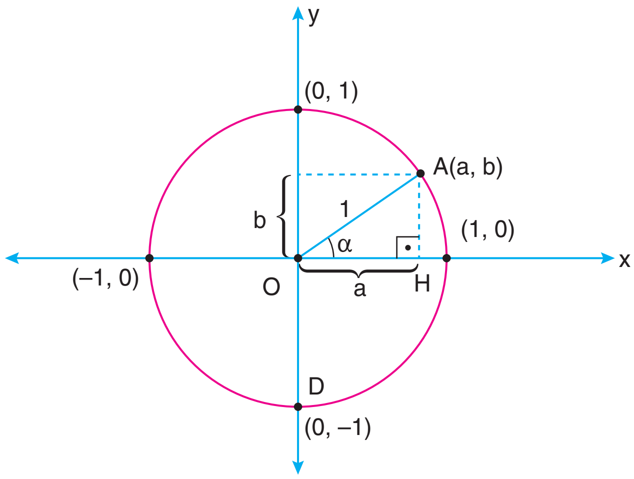
7. Aşağıdaki tabloda verilen açıların herbirinin esas ölçüsünü aynı ölçü cinsinden bularak boş bırakılan alanlara yazınız.

Açının ölçüsü	$790°$	$-1285°$	$9275°$	$\frac{20\pi}{3}$	$-\frac{25\pi}{4}$	$\frac{95\pi}{7}$
Açının esas ölçüsü						

1.2. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

1.2.1. Trigonometrik Fonksiyonlar

Kosinüs ve Sinüs Fonksiyonu



Yukarıdaki AOH dik üçgeninde

Bir α açısına birim çember üzerinde karşılık gelen nokta $A(a, b)$ ise A noktasının apsisine açının **kosinüsü**, ordinatına ise açının **sinüsü** denir.

$\mathbf{cos}\,\alpha = \mathbf{a}$, $\mathbf{sin}\,\alpha = \mathbf{b}$

Birim çemberde de görüldüğü gibi açıların kosinüs ve sinüsleri -1 ile 1 arasında değerler almaktadır. Bu durumda $-\mathbf{1} \leq \mathbf{sin}\,\alpha \leq \mathbf{1}$, $-\mathbf{1} \leq \mathbf{cos}\,\alpha \leq \mathbf{1}$ dir.

α açısını, $\cos\alpha$ ile eşleyen fonksiyona **kosinüs fonksiyonu** denir.

Kosinüs fonksiyonu $f: \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlanır.

α açısını, $\sin\alpha$ ile eşleyen fonksiyona **sinüs fonksiyonu** denir.

Sinüs fonksiyonu $f: \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlanır.

α açısının kosinüsü, A noktasının apsisi olduğundan x eksenine aynı zamanda **kosinüs ekseni;** α açısının sinüsü, A noktasının ordinatı olduğundan y eksenine **sinüs ekseni** denir.

Yukarıdaki AHO dik üçgeninde

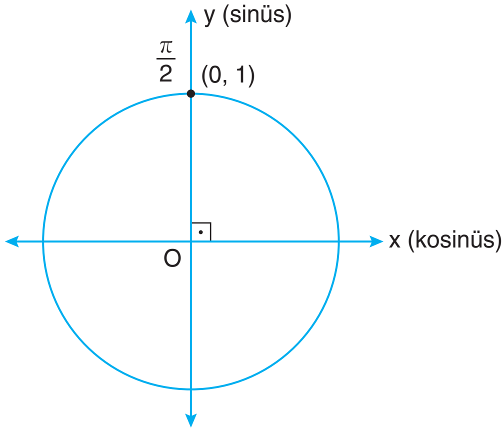
$$\cos\alpha = \frac{|HO|}{|AO|} = \frac{a}{1} = a$$

$$\sin\alpha = \frac{|HA|}{|AO|} = \frac{b}{1} = b$$

Örnek

$\sin\frac{\pi}{2}$ ve $\cos\frac{\pi}{2}$ nin değerini birim çember yardımıyla bulalım.

Çözüm



Şekilde görüldüğü gibi birim çember üzerinde $\frac{\pi}{2}$ ye karşılık gelen nokta $(0,1)$ dır.

$(0,1)$ noktasının apsisi kosinüs, ordinatı sinüs değerine eşit olduğundan $\cos\frac{\pi}{2}=0$ ve $\sin\frac{\pi}{2}=1$ olur.

Örnek

$x \in \mathbb{R}, f(x)=2\sin x-1$ fonksiyonunun değer aralığını bulalım.

Çözüm

$-1 \le \sin x \le 1$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$2\cdot(-1) \le 2\sin x \le 2\cdot 1$

$-2-1 \le 2\sin x-1 \le 2-1$

$-3 \le 2\sin x-1 \le 1$ olduğundan

$f(x)=2\cdot\sin x-1$ fonksiyonunun değer aralığı, $[-3,1]$ olur.

Örnek

$\cos x = 2-4m$ olduğuna göre m reel sayısının değer aralığını bulalım.

Çözüm

$-1 \le \cos x \le 1$ olduğundan

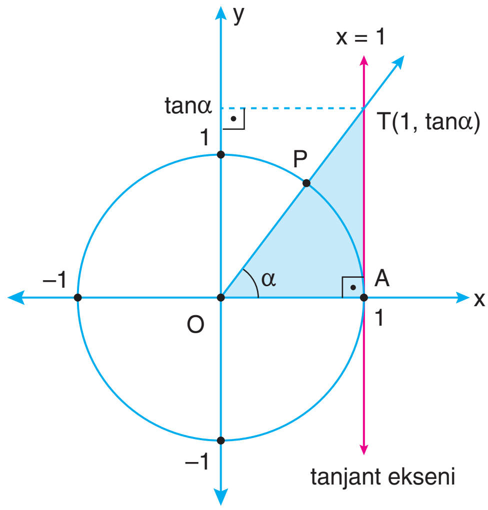
$-1 \le 2-4m \le 1 \Rightarrow -1-2 \le 2-2-4m \le 1-2$

$-3 \le -4m \le -1$

$3 \ge 4m \ge 1$

$\frac{1}{4} \le m \le \frac{3}{4}$ olur. Buna göre $m \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ dır.

Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonu

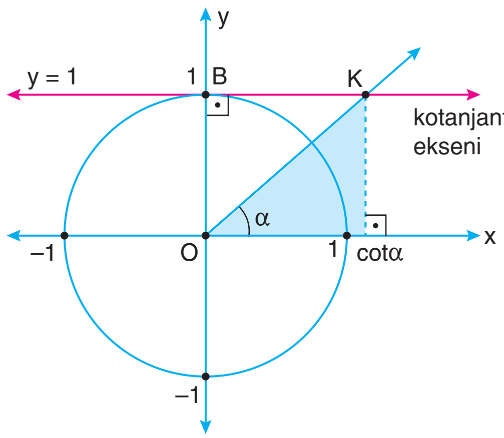


Yukarıdaki birim çemberde x = 1 doğrusu birim çembere A noktasında teğet ve [OP, x = 1 doğrusunu T noktasında kessin.

T noktasının ordinatına α açısının **tanjantı** denir. x = 1 doğrusuna **tanjant ekseni** denir. α açısını, $\tan\alpha$ ile eşleyen fonksiyona **tanjant fonksiyonu** denir.

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ veya $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ olduğunda α açısının kolu tanjant eksenine paralel olduğundan $\tan\frac{\pi}{2}$ ve $\tan\frac{3\pi}{2}$ tanımsızdır.

Tanjant fonksiyonu, $f\colon \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlanır.



Birim çemberde α açısının bitim kenarı y = 1 doğrusunu K noktasında kessin. K noktasının apsisine α açısının **kotanjantı** denir. y = 1 doğrusuna **kotanjant ekseni** denir. α reel açısını, $\cot\alpha$ ile eşleyen fonksiyona **kotanjant fonksiyonu** denir.

$\alpha = 0$ veya $\alpha = \pi$ olduğunda α açısının kolu y = 1 (kotanjant ekseni) doğrusuna paralel olduğundan $\cot 0$ ve $\cot\pi$ tanımsızdır. Buna göre $k \in \mathbb{Z}$ için $\cot k\pi$ tanımsız olur. Kotanjant fonksiyonu,

$f\colon \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow$ R, $f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlanır.

Tanjant ve kotanjant fonksiyonları rasyonel fonksiyonlar olduklarından paydayı sıfır yapan değerlerde tanımsızdır.

Sekant ve Kosekant Fonksiyonları

O merkezli çemberde KM doğrusu birim çembere L noktasında teğet olup eksenleri kestiği noktalar K ve M dir.

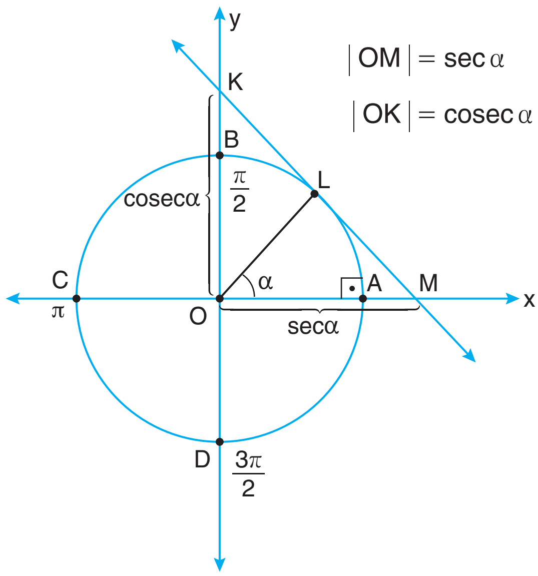
$m(\widehat{LOM}) = \alpha$ olmak üzere

M noktasının apsisine α açısının **sekantı** denir.

α açısının sekantı **sec** α şeklinde gösterilir.

K noktasının ordinatına α açısının **kosekantı** denir.

α açısının kosekantı, **cosec** α şeklinde gösterilir.



$f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - (-1, 1),\ f(x) = \sec x$ fonksiyonuna **sekant fonksiyonu** denir.

$f: \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R} - (-1, 1),\ f(x) = \mathrm{cosec}\, x$ fonksiyonuna **kosekant fonksiyonu** denir.

O merkezli birim çemberde $\widehat{OLT} \sim \widehat{OML}$ olduğundan

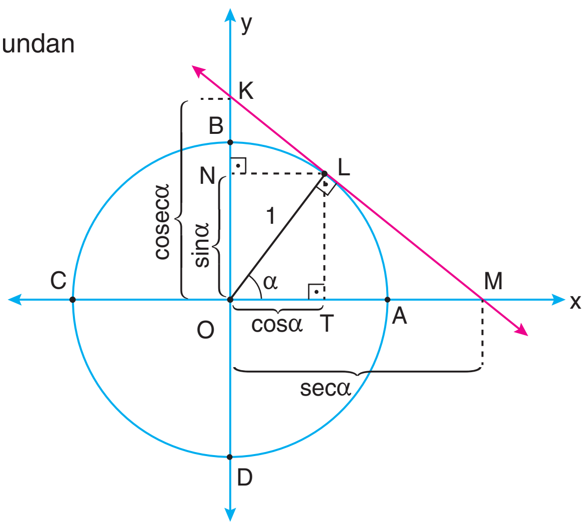
$$\frac{|OL|}{|OM|} = \frac{|OT|}{|OL|} \Rightarrow \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1}$$

$$\mathbf{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}} \text{ bulunur.}$$

$\widehat{LON} \sim \widehat{KOL}$ olduğundan

$$\frac{|LO|}{|KO|} = \frac{|ON|}{|OL|} \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{cosec}\,\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1}$$

$$\mathbf{\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}} \text{ olur.}$$



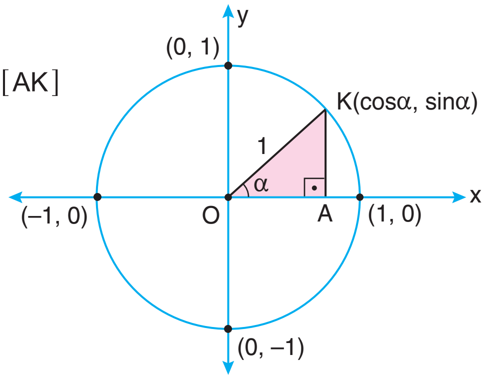
O merkezli birim çemberde OAK dik üçgendir. $[OA] \perp [AK]$

$|OA| = \cos\alpha,\ |AK| = \sin\alpha$ ve $|OK| = 1$ olduğundan

$|OA|^2 + |KA|^2 = |OK|^2$ (Pisagor teoremi)

$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1^2$

$\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ dir.



Örnek

Tanımlı olduğu değerlerde $\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x} = 1 + \cos x$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ olduğundan $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ yazılabilir. Buna göre

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} = \frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{1-\cos x} = 1 + \cos x \text{ olur.}$$

O merkezli birim çemberde $\widehat{OMR} \sim \widehat{OAT}$ olduğundan

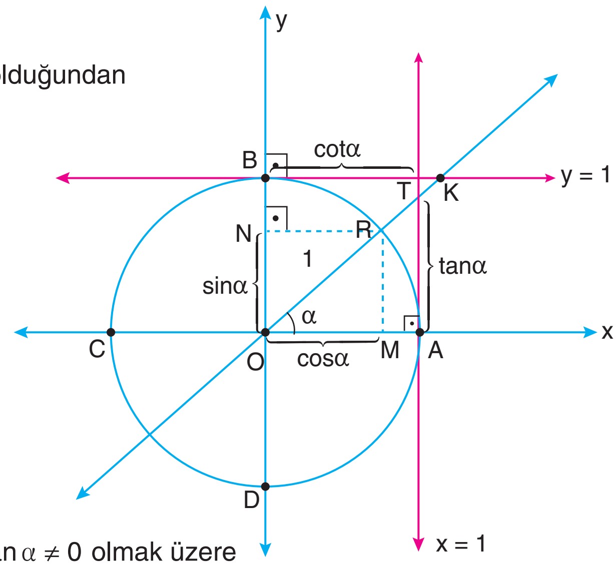
$$\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|MR|}{|AT|} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$$

$\mathbf{\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ bulunur.

$\widehat{ONR} \sim \widehat{OBK}$ olduğundan

$$\frac{|ON|}{|OB|} = \frac{|NR|}{|BK|} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\cos\alpha}{\cot\alpha}$$

$\mathbf{\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$ bulunur.



Bu iki eşitlikten yararlanarak $\cot\alpha \neq 0$ ve $\tan\alpha \neq 0$ olmak üzere

$\mathbf{\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1,\ \tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha},\ \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}}$ yazılabilir.

Örnek

$x \in (0, 2\pi)$ ve $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{\dfrac{1}{\sin x} + \cos x}{\dfrac{1}{\cos x} + \sin x}$ ifadesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

$$\frac{\dfrac{1}{\sin x} + \cos x}{\dfrac{1}{\cos x} + \sin x} = \frac{\dfrac{1}{\sin x} + \underset{(\sin x)}{\dfrac{\cos x}{1}}}{\dfrac{1}{\cos x} + \underset{(\cos x)}{\dfrac{\sin x}{1}}} = \frac{\dfrac{1 + \sin x \cdot \cos x}{\sin x}}{\dfrac{1 + \sin x \cdot \cos x}{\cos x}} = \frac{\cancel{1 + \sin x \cdot \cos x}}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\cancel{1 + \sin x \cdot \cos x}}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

Örnek

Tanımlı olduğu aralıklarda $\cos^2 x \cdot \tan x + \sin^2 x \cdot \cot x$ ifadesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

$$\cos^2 x \cdot \tan x + \sin^2 x \cdot \cot x = \overset{\cos x}{\cancel{\cos^2}} x \cdot \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} + \overset{\sin x}{\cancel{\sin^2}} x \cdot \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x$$

Örnek

Tanımlı olduğu aralıklarda $(1 + \tan^2 x) \cdot \cos^2 x$ ifadesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

$$(1 + \tan^2 x) \cdot \cos^2 x = \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) \cdot \cos^2 x = \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cancel{\cos^2} x}\right) \cdot \cancel{\cos^2} x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Örnek

Tanımlı olduğu aralıklarda $\dfrac{1}{\sec x} \cdot \operatorname{cosec} x = \cot x$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$\frac{1}{\sec x} \cdot \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\sin x} = \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

Örnek

Tanımlı olduğu aralıklarda $\sec^2 x - \tan^2 x$ ifadesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

$$\sec^2 x - \tan^2 x = (\sec x)^2 - (\tan x)^2 = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

Örnek

Tanımlı olduğu aralıklarda

$\frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2\sec x$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$\underset{(1+\sin x)}{\frac{1 + \sin x}{\cos x}} + \underset{(\cos x)}{\frac{\cos x}{1 + \sin x}} = \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos x \cdot (1 + \sin x)} + \frac{\cos^2 x}{\cos x \cdot (1 + \sin x)}$$

$$= \frac{1 + 2\sin x + \overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1}}{\cos x \cdot (1 + \sin x)}$$

$$= \frac{1 + 2\sin x + 1}{\cos x \cdot (1 + \sin x)}$$

$$= \frac{2 + 2 \cdot \sin x}{\cos x \cdot (1 + \sin x)}$$

$$= \frac{2 \cdot (1 + \sin x)}{\cos x \cdot (1 + \sin x)}$$

$$= \frac{2}{\cos x} = 2 \cdot \frac{1}{\cos x} = 2\sec x$$

Örnek

Tanımlı olduğu aralıklarda $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$1+\tan^2\alpha=1+\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$$

$$=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2=(\sec\alpha)^2=\sec^2\alpha$$

Örnek

Tanımlı olduğu aralıklarda $1+\cot^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$1+\cot^2\alpha=1+\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2=(\operatorname{cosec}\alpha)^2=\operatorname{cosec}^2\alpha$$

SONUÇ

$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ ve $1+\cot^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha$ dır.

Örnek

Tanımlı olduğu aralıklarda $(1+\cot^2x)\cdot\sin^2x$ ifadesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

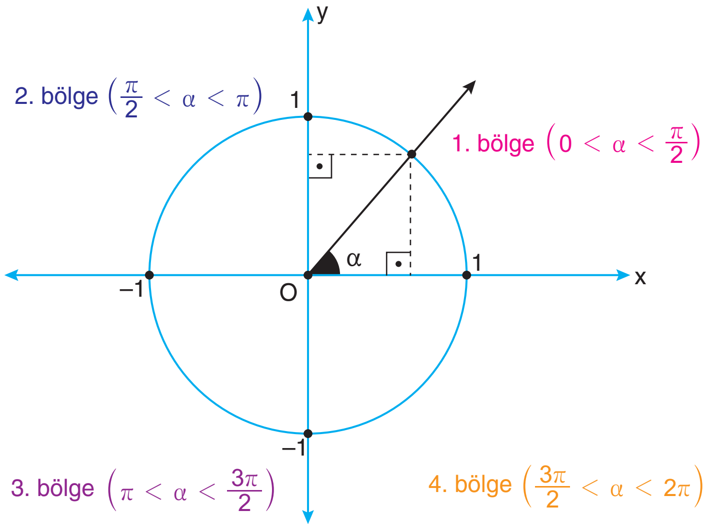
$$(1+\cot^2x)\cdot\sin^2x=\operatorname{cosec}^2x\cdot\sin^2x=\frac{1}{\sin^2x}\cdot\sin^2x=1$$

Trigonometrik Fonksiyonların Bölgelere Göre İşaretleri

Kosinüs fonksiyonu 1 ve 4. bölgede pozitif, 2 ve 3. bölgede negatif değer alır.

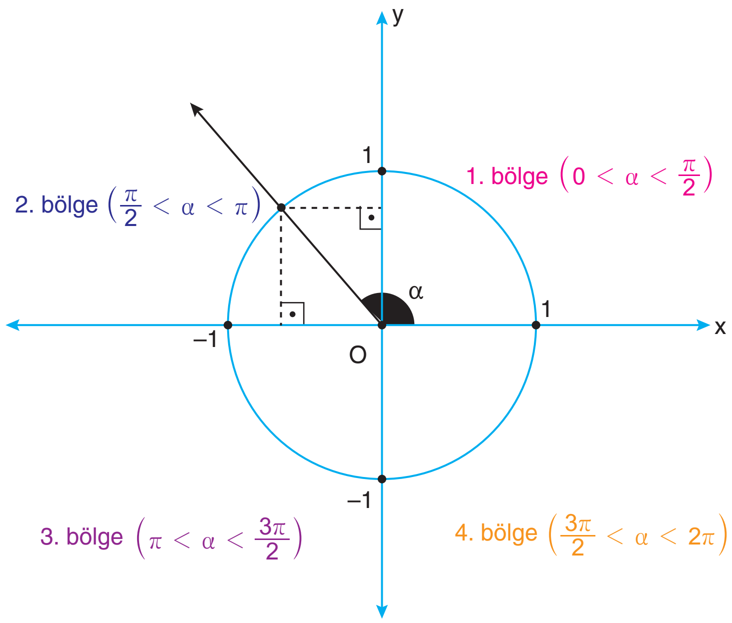
Sinüs fonksiyonu 1 ve 2. bölgede pozitif, 3 ve 4. bölgede negatiftir.

Bu fonksiyonları birim çemberde gösterelim.



$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ iken $0 < \cos\alpha < 1$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ iken $0 < \sin\alpha < 1$

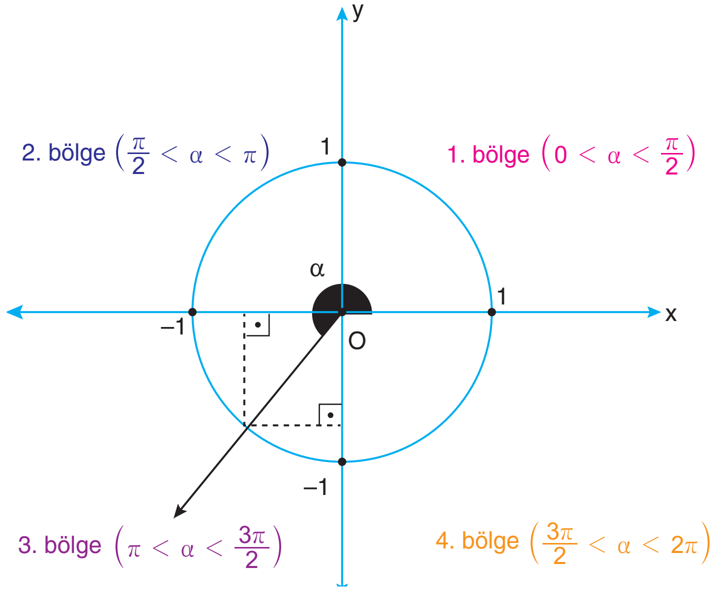


$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ iken $-1 < \cos\alpha < 0$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ iken $0 < \sin\alpha < 1$

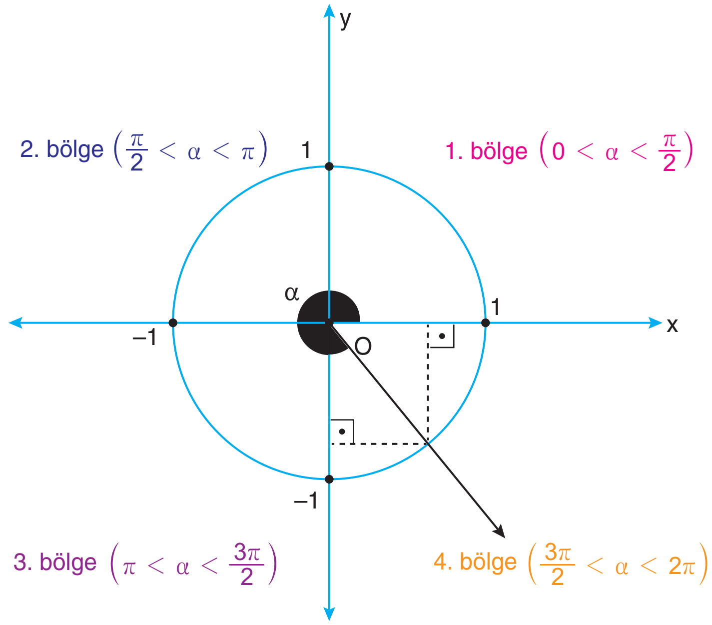
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ iken $-1 < \cos\alpha < 0$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ iken $-1 < \sin\alpha < 0$



$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ iken $0 < \cos\alpha < 1$

$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ iken $-1 < \sin\alpha < 0$



Örnek

Aşağıda verilen trigonometrik değerlerin işaretlerini bulalım.

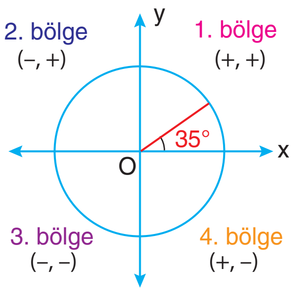
a) $\sin 35°$ **b)** $\sin\frac{2\pi}{3}$ **c)** $\sin 290°$

ç) $\cos 125°$ **d)** $\cos 324°$ **e)** $\sec 37°$

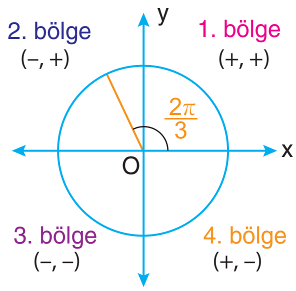
f) $\operatorname{cosec} 132°$ **g)** $\sin 402°$

Çözüm

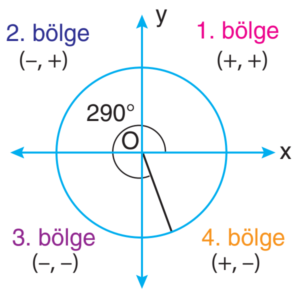
a) 35°, 1. bölgede olduğundan $\sin 35°$ pozitiftir.



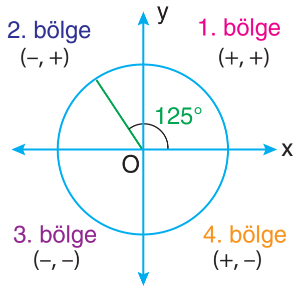
b) $\frac{2\pi}{3}$, , 2. bölgede olduğundan $\sin\frac{2\pi}{3}$ pozitiftir.



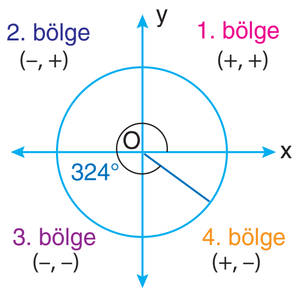
c) 290°, 4. bölgede olduğundan $\sin 290°$ negatiftir.



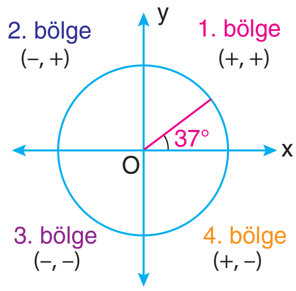
ç) 125°, 2. bölgede olduğundan $\cos 125°$ negatiftir.



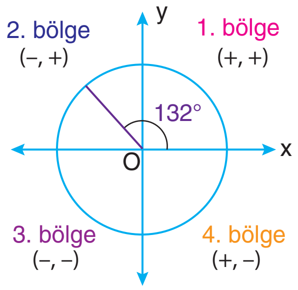
d) 324°, 4. bölgede olduğundan $\cos 324°$ pozitiftir.



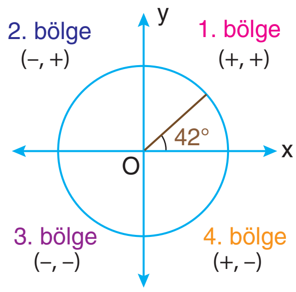
e) $\sec 37° = \frac{1}{\cos 37°}$ ve $\cos 37°$ 1. bölgede pozitif değer aldığından $\sec 37°$ de pozitiftir.



f) $\text{cosec}\, 132° = \frac{1}{\sin 132°}$ ve $\sin 132°$ 2. bölgede pozitif olduğundan $\text{cosec}\, 132°$ de pozitiftir.



g) $402° = 360° + 42°$ olduğundan 402° nin esas ölçüsü 42° dir. $\sin 402° = \sin 42°$ olur. 42° 1. bölgede pozitif olduğundan $\sin 402°$ pozitiftir.

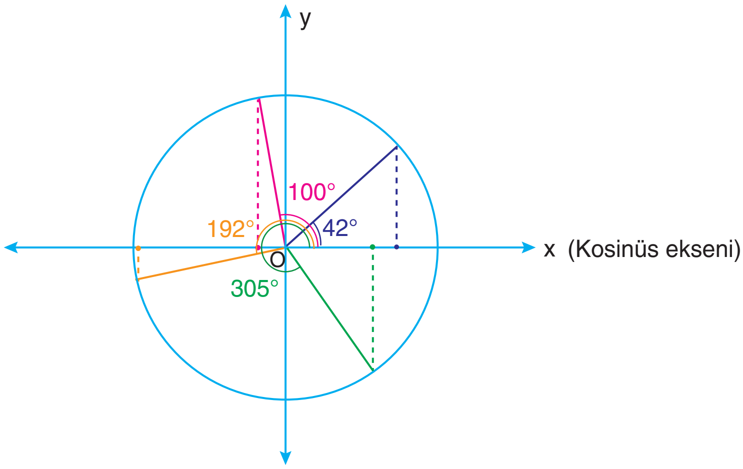


Örnek

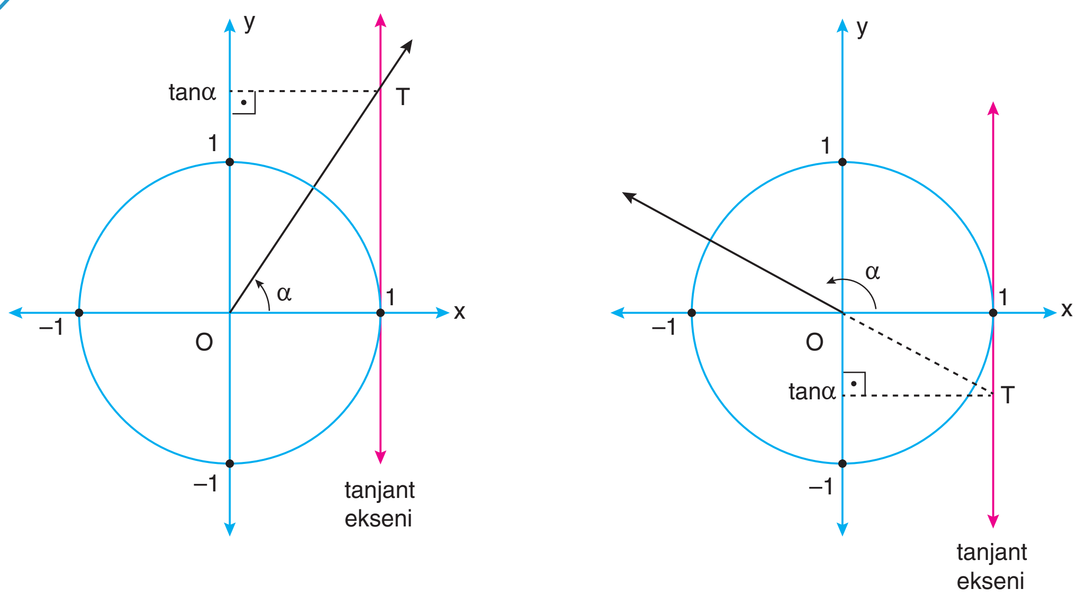
$\cos 100°$, $\cos 42°$, $\cos 192°$, $\cos 305°$ değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

Çözüm

Birim çember üzerinde her bir açının bitim kenarının birim çemberi kestiği noktaların apsislerini karşılaştıralım. 100°, 42°, 192°, 305° lik açıların kosinüs değerlerinin sıralaması sorulduğuna göre bu açıların birim çemberi kestikleri noktaların apsislerini karşılaştırmalıyız.

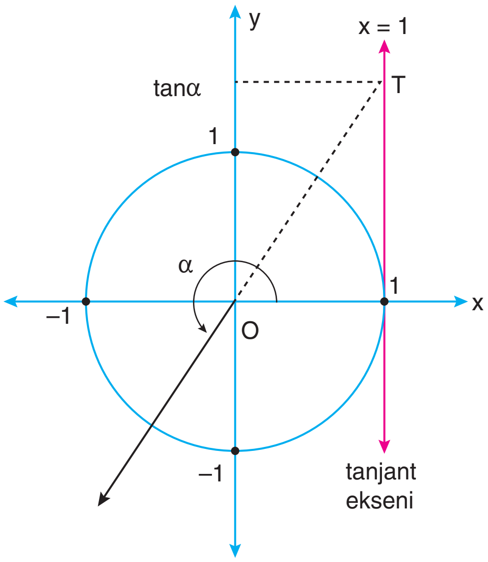


şekli incelediğizde $\cos 192° < \cos 100° < \cos 305° < \cos 42°$ olur.

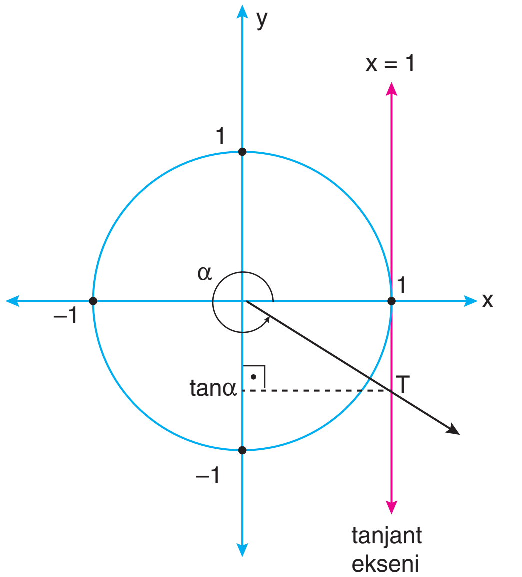


(1. bölge) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ iken $\tan\alpha > 0$

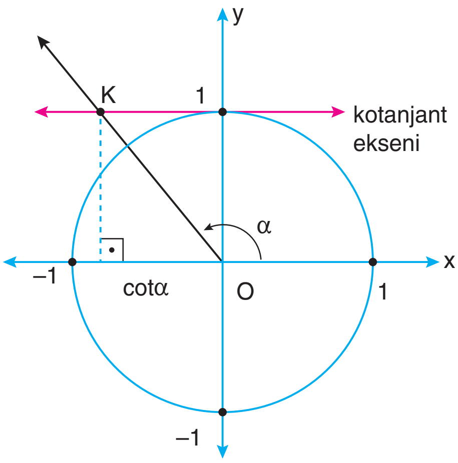
(2. bölge) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ iken $\tan\alpha < 0$



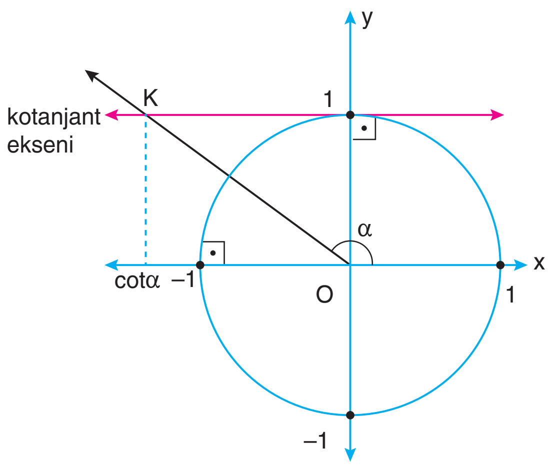
(3. bölge) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ iken $\tan\alpha > 0$



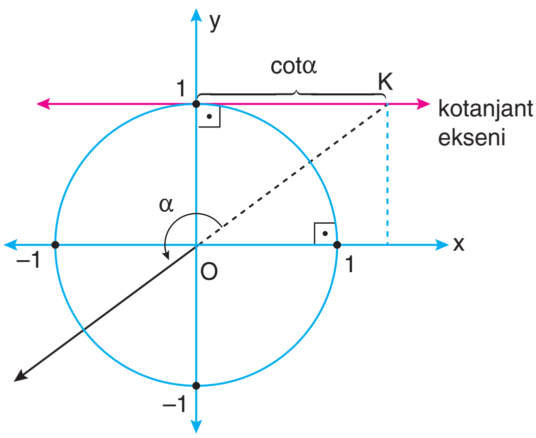
(4. bölge) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ iken $\tan\alpha < 0$



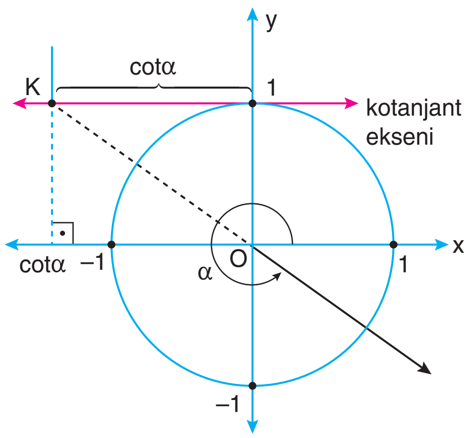
(1. bölge) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ iken $\cot\alpha > 0$



(2. bölge) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ iken $\cot\alpha < 0$



(3. bölge) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ iken $\cot\alpha > 0$



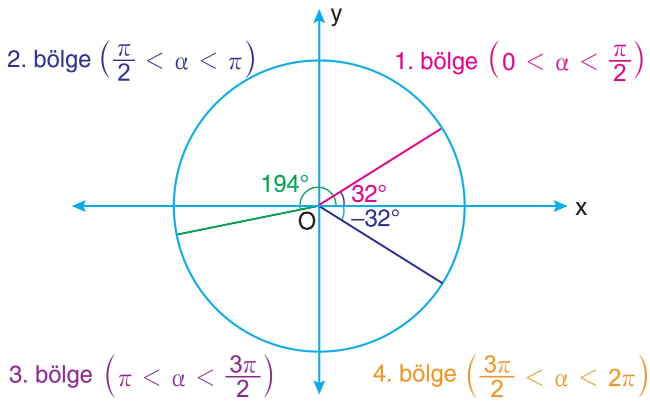
(4. bölge) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ iken $\cot\alpha < 0$

Örnek

$\tan 32°$, $\cot 194°$, $\tan(-32°)$ değerlerinin işaretlerini bulalım.

Çözüm

Açıları birim çemberde gösterelim.



32°, 1. bölgede olduğundan $\tan 32°$ pozitif,

194°, 3. bölgede olduğundan $\cot 194°$ pozitif,

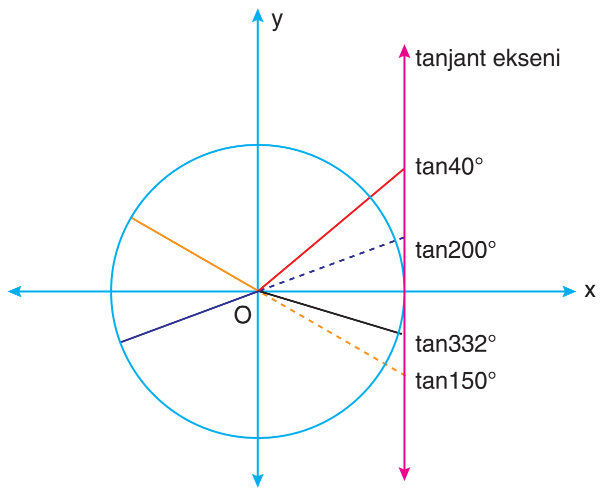
$-32°$, 4. bölgede olduğundan $\tan(-32°)$ negatiftir.

Örnek

$\tan 332°$, $\tan 200°$, $\tan 150°$, $\tan 40°$ değerlerini büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

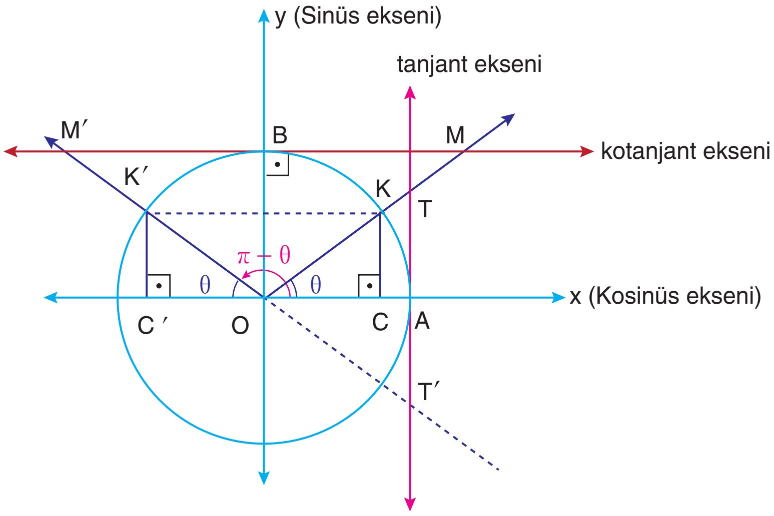
Çözüm

332°, 200°, 150° ve 40° lik açıların tanjant değerlerini karşılaştırmak için birim çember üzerinde her bir açının bitim kenarının tanjant eksenini kestiği noktaları karşılaştırmalıyız.



Yukarıdaki şekle göre $\tan 40° > \tan 200° > \tan 332° > \tan 150°$ olur.

$\frac{k\pi}{2} \pm \theta \, (k \in \mathbb{Z})$ Açılarının Trigonometrik Değerleri



O merkezli Birim çember üzerindeki K noktasının y eksenine göre simetriği K′ olmak üzere θ ve $\pi - \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ açılarının trigonometrik değerleri için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir: (θ açısının bitim kenarı birim çemberi K noktasında kesmektedir.)

$|KC| = \sin\theta$ $\qquad |K'C'| = \sin(\pi - \theta)$

$|OC| = \cos\theta$ $\qquad -|OC'| = \cos(\pi - \theta)$

$|AT| = \tan\theta$ $\qquad -|AT'| = \tan(\pi - \theta)$

$|MB| = \cot\theta$ $\qquad -|M'B| = \cot(\pi - \theta)$

$|KC| = |K'C'|$, $|OC| = |OC'|$, $|AT| = |AT'|$, $|MB| = |M'B|$ olduğundan

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

$\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$ olur.

Örnek

120°nin trigonometrik değerlerini bulalım.

Çözüm

$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

$\tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

$\cot 120° = \cot(180° - 60°) = -\cot 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Örnek

$\dfrac{\sin 130° \cdot \cos 20°}{\cos 160° \cdot \sin 50°}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\sin 130° = \sin(180° - 50°) = \sin 50°$

$\cos 160° = \cos(180° - 20°) = -\cos 20°$dir. Buna göre

$\dfrac{\sin 130° \cdot \cos 20°}{\cos 160° \cdot \sin 50°} = \dfrac{\cancel{\sin 50°} \cdot \cancel{\cos 20°}}{-\cancel{\cos 20°} \cdot \cancel{\sin 50°}} = -1$ olur.

Örnek

Bir ABC üçgeni için $\sin(\widehat{A} + \widehat{B}) - \sin\widehat{C}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$ ise

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180° - m(\widehat{C})$

$\sin(\widehat{A} + \widehat{B}) = \sin(180° - \widehat{C}) = \sin\widehat{C}$

Buna göre $\sin(\widehat{A} + \widehat{B}) - \sin\widehat{C} = \sin\widehat{C} - \sin\widehat{C} = 0$ olur.

Örnek

Bir ABC üçgeni için $\cot(\widehat{A} + \widehat{B}) + \cot\widehat{C}$ ifadesinin değerini bulalım.

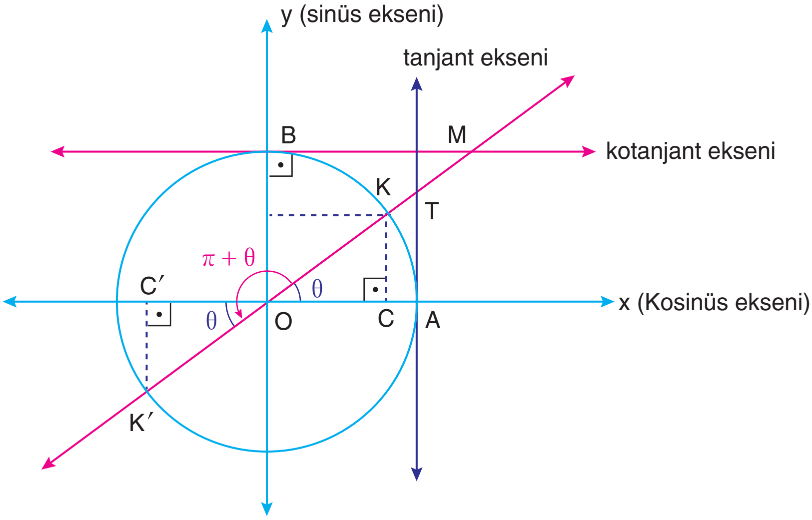
Çözüm

ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$ ise

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180° - m(\widehat{C})$

$\cot(\widehat{A} + \widehat{B}) = \cot(180° - \widehat{C}) = -\cot\widehat{C}$

Buna göre $\cot(\widehat{A} + \widehat{B}) + \cot\widehat{C} = -\cot\widehat{C} + \cot\widehat{C} = 0$ olur.



Birim çember üzerinde K noktasının orijine göre simetriği K′ olmak üzere θ ve $\pi+\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ açılarının trigonometrik değerleri için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir: (θ açısının bitim kenarı birim çemberi K noktasında kesmektedir.)

$\lvert KC\rvert=\sin\theta$	$\lvert K'C'\rvert=\sin(\pi+\theta)$
$\lvert OC\rvert=\cos\theta$	$\lvert OC'\rvert=\cos(\pi+\theta)$
$\lvert AT\rvert=\tan\theta$	$\lvert AT\rvert=\tan(\pi+\theta)$
$\lvert MB\rvert=\cot\theta$	$\lvert MB\rvert=\cot(\pi+\theta)$

$\lvert KC\rvert=\lvert K'C'\rvert$ ve $\lvert OC\rvert=\lvert OC'\rvert$ olduğundan

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

$\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$ olur.

Örnek

Ölçüsü $\frac{5\pi}{4}$ olan açının trigonometrik değerlerini bulalım.

Çözüm

$$\sin\frac{5\pi}{4}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{4}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{4}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$\cot\frac{5\pi}{4}=\cot\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cot\frac{\pi}{4}=1$$

Örnek

Ölçüsü $\frac{4\pi}{3}$ olan açının trigonometrik değerlerini bulalım.

Çözüm

$$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$\cot\frac{4\pi}{3}=\cot\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Örnek

Ölçüsü 240° olan açının trigonometrik değerlerini bulalım.

Çözüm

$$\sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ=\cos(180^\circ+60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ=\tan(180^\circ+60^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

$$\cot 240^\circ=\cot(180^\circ+60^\circ)=\cot 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Örnek

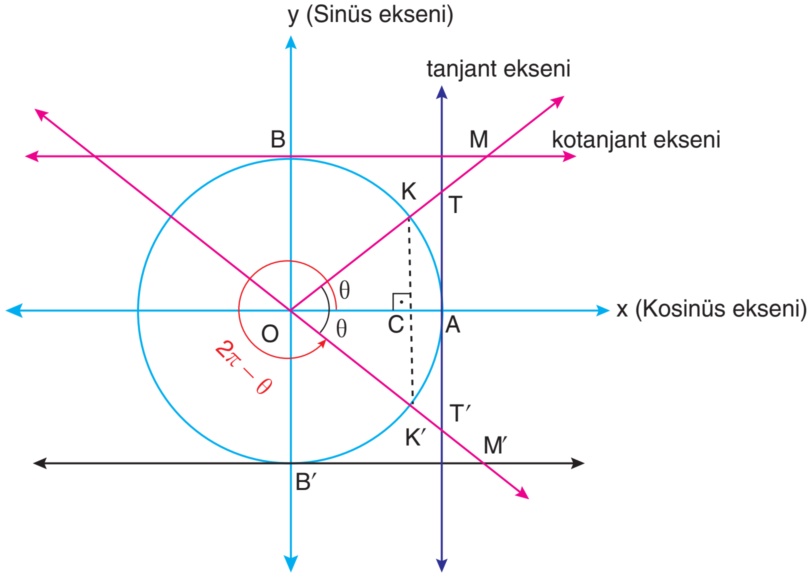
$\frac{\cos 25^\circ+\cos 205^\circ+\tan 80^\circ}{\tan 260^\circ}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\cos 205^\circ=\cos(180^\circ+25^\circ)=-\cos 25^\circ$

$\tan 260^\circ=\tan(180^\circ+80^\circ)=\tan 80^\circ$dir. Buna göre

$$\frac{\cos 25^\circ+\cos 205^\circ+\tan 80^\circ}{\tan 260^\circ}=\frac{\cos 25^\circ-\cos 25^\circ+\tan 80^\circ}{\tan 80^\circ}=\frac{0+\tan 80^\circ}{\tan 80^\circ}=1 \text{ olur.}$$



Birim çember üzerinde K noktasının x eksenine göre simetriği K′ olmak üzere θ ve $2\pi-\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ açılarının trigonometrik değerleri için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir: (θ açısının bitim kenarı birim çemberi K noktasında kesmektedir.)

$|KC| = \sin\theta$ $\qquad -|K'C| = \sin(2\pi-\theta)$

$|OC| = \cos\theta$ $\qquad |OC| = \cos(2\pi-\theta)$

$|AT| = \tan\theta$ $\qquad -|AT'| = \tan(2\pi-\theta)$

$|MB| = \cot\theta$ $\qquad -|M'B'| = \cot(2\pi-\theta)$

$|KC| = |K'C|,\ |AT| = |AT'|,\ |MB| = |M'B'|$

$\sin(2\pi-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(2\pi-\theta) = \cos\theta$

$\tan(2\pi-\theta) = -\tan\theta$

$\cot(2\pi-\theta) = -\cot\theta$

$2\pi-\theta$ ve $-\theta$ birim çember üzerinde aynı noktaya denk geldiklerinden aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

Örnek

300°nin trigonometrik değerlerini bulalım.

Çözüm

$\sin 300° = \sin(360° - 60°) = -\sin 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

$\tan 300° = \tan(360° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

$\cot 300° = \cot(360° - 60°) = -\cot 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ETKİNLİK

Tablodaki açı ölçülerinin trigonometrik değerlerini bularak boş alanlara yazınız.

	270°	330°	−30°	−60°	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{4}$
sin						
cos						
tan						
cot						

Örnek

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\tan(\theta - 5\pi)$ ifadesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

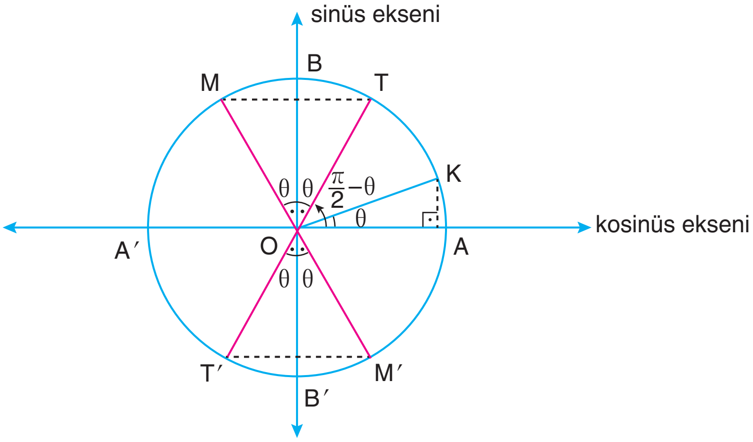
$\tan(\theta - 5\pi) = \tan(\theta - \pi)$ $\quad$ (π, 5π esas ölçüsüdür.)

$= \tan[-(\pi - \theta)]$

$= -\tan(\pi - \theta)$

$= -(-\tan\theta)$

$= \tan\theta$



K, T, M, T′ ve M′ sırası ile $\theta, \frac{\pi}{2}-\theta, \frac{\pi}{2}+\theta, \frac{3\pi}{2}-\theta, \frac{3\pi}{2}+\theta$ açılarının bitim kenarı birim çemberi kestiği noktalar olsun.

Yukarıdaki O merkezli birim çemberde TOA açısı ile KOA açısı karşılaştırılırsa

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$

MOA açısı ile MOB açısı karşılaştırılırsa

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$

T′OA açısı ile T′OA açısı karşılaştırılırsa

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$

$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$

M′OA açısı ile M′OB açısı karşılaştırılırsa

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$

$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek

θ dar açı olmak üzere $\sin\left(\theta - \frac{7\pi}{2}\right)$ ifadesini en sade biçimde yazalım.

Çözüm

$$\sin\left(\theta - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left[\theta - \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi\right)\right]$$

$$= \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) \qquad \left(\frac{3\pi}{2} \text{ esas ölçü}\right)$$

$$= \sin\left[-\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)\right] = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -(-\cos\theta) = \cos\theta$$

Örnek

$\sin 10° = a$ olduğuna göre $\cos 100°$ ifadesinin değerini a cinsinden yazalım.

Çözüm

$$\cos 100° = \cos(180° - 80°)$$

$$= -\cos 80° = -\cos(90° - 10°) = -\sin 10° = -a$$

Örnek

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \sin(2\pi - x)}{\tan(\pi + x)}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$, $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ ve $\tan(\pi + x) = \tan x$

Buna göre

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \sin(2\pi - x)}{\tan(\pi + x)} = \frac{-\sin x - (-\sin x)}{\tan x}$$

$$= \frac{-\sin x + \sin x}{\tan x}$$

$$= \frac{0}{\tan x}$$

$= 0$ olur.

UYGULAYALIM 1-2

1. Ölçüsü $0°, 45°, 225°, \frac{5\pi}{3}$ ve $\frac{7\pi}{4}$ olan açıların trigonometrik değerlerini bulunuz.

2. Aşağıdaki ifadelerden her birinin eşitini bularak örnekteki gibi eşleştiriniz.

$\frac{1}{\cos x}$ →	$\cos^2 x$
$1 + \tan^2 x$	$\sec x$
$1 - \sin^2 x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{1 - \sin^2 x}{1 - \cos^2 x}$	$\text{cosec}\, x$
$\frac{\cos x}{\cot x}$	$\cot^2 x$
	$\sin x$

3. Aşağıda verilen trigonometrik değerlerin işaretlerini boş kutulara yazınız.

☐ $\sin 53°$	☐ $\cot(-28°)$	☐ $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$
☐ $\cos 222°$	☐ $-\sin 124°$	☐ $\sec\frac{\pi}{12}$
☐ $\tan 2°$	☐ $\text{cosec}\, 312°$	

4. Aşağıda verilen trigonometrik değerleri küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

a) $\sin 10°,\ \sin 172°,\ \sin 43°,\ \sin 75°$

b) $\cos 12°,\ \cos 24°,\ \cos 302°,\ \cos(-2°)$

c) $\sin 70°,\ \cos 15°,\ \cos 178°,\ \sin 200°$

ç) $\sin 25°,\ \tan 220°,\ \cot 40°,\ \cos 70°$

d) $\sin\frac{\pi}{12},\ \cos\frac{3\pi}{4},\ \tan\frac{\pi}{10},\ \cot\frac{2\pi}{5}$

5. Tanımlı olduğu aralıklarda $\frac{1 + \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2\,\text{cosec}\, x$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

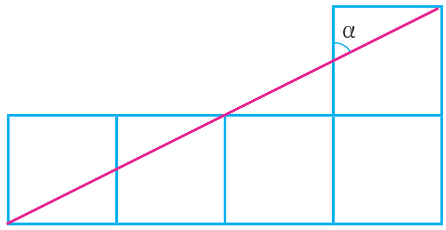
6. $\sin 10° = x$ olduğuna göre $\cos 350°$nin x türünden yazılışını bulunuz.

7. Tanımlı olduğu aralıklarda $\sin x + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$ ifadesini en sade biçimde yazınız.

8. Tanımlı olduğu aralıklarda $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$ ifadesini en sade biçimde yazınız.

9. Yandaki şekilde özdeş kareler kullanılmıştır.

Buna göre $\cos\alpha$ kaçtır?



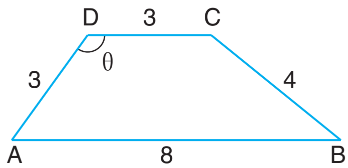
10. $\tan 20° = a$ olduğuna göre $\dfrac{\tan 200° - \tan 340°}{\cot 250° + \cot 160°}$ ifadesini a cinsinden yazınız.

11. x dar açı olmak üzere

$\sin(\pi + x) + \cos(2\pi + x) + \sin(-x)$ ifadesinin değerini bulunuz.

12. Yandaki ABCD yamuğunda, $[AB] // [CD]$, $|AD| = |CD| = 3$ br,

$|BC| = 4$ br ve $|AB| = 8$ br ise $\tan\theta$ değeri kaçtır?



13. Bir ABC üçgeni için $\tan(\widehat{A} + \widehat{B}) - \tan\widehat{C}$ değerini bulunuz.

14. $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x)}{\cot\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) - \tan(2\pi - x)}$ ifadesini en sade biçimde yazınız.

15. $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ ve $\tan x = \dfrac{1}{2}$ olduğuna göre $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sec x}$ ifadesini en sade biçimde yazınız.

16. $\dfrac{1}{1 + \sec 2°} + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\sec 2°}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

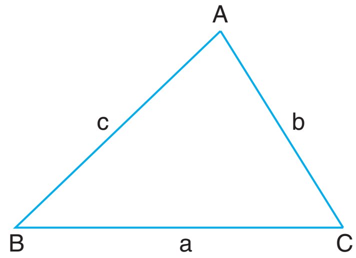
1.2.2. Kosinüs Teoremi

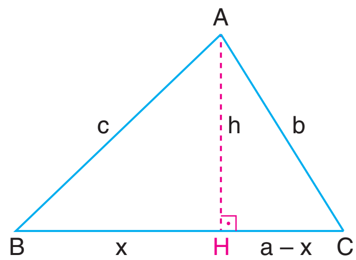
Yandaki ABC üçgeninde $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ ve $\widehat{C}$ iç açılar olmak üzere
$|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$ olmak üzere

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A},$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B},$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\widehat{C}$ dir.





ABC üçgeninde

$[AH] \perp [BC]$, $|BH| = x$ ve $|HC| = a - x$ alalım.

AHB dik üçgeninde

$|AB|^2 = |BH|^2 + |AH|^2$ (Pisagor teoremi)

$c^2 = x^2 + h^2$

$h^2 = c^2 - x^2 \cdots (1)$

AHC dik üçgeninde

$|AC|^2 = |AH|^2 + |HC|^2 \Rightarrow b^2 = h^2 + (a - x)^2$

$h^2 = b^2 - (a - x)^2 \cdots (2)$ olur.

(1) ve (2) den

$c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2$ ise $c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ax \cdots (3)$ elde edilir.

AHB dik üçgeninde

$\cos\widehat{B} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c.\cos\widehat{B}$ ifadesini, (3) ifadesinde yerine yazalım.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ax$

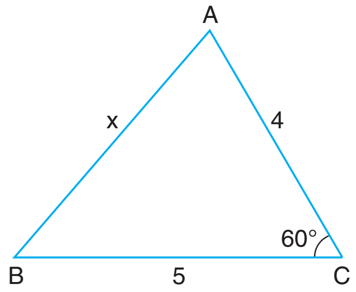
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\widehat{B}$ elde edilir. Benzer işlemlerle

$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cdot \cos\widehat{A}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\widehat{C}$ elde edilir.

Örnek

Yandaki ABC üçgeninde $m(\widehat{C}) = 60°$, $|AC| = 4$ cm ve $|BC| = 5$ cm ise $|AB| = x$ kaç cm dir?



Çözüm

Kosinüs teoremine göre

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\widehat{C}$

$x^2 = 5^2 + 4^2 - 2.5.4.\cos 60°$

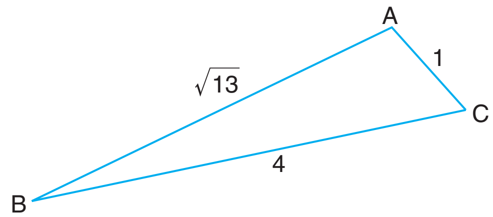
$x^2 = 25 + 16 - 40 \cdot \frac{1}{2}$

$x^2 = 41 - 20$

$x = \sqrt{21}$ cm bulunur.

Örnek

Yandaki ABC üçgeninde $|AC| = 1$ cm, $|BC| = 4$ cm ve $|AB| = \sqrt{13}$ cm ise C açısının ölçüsünü bulalım.



Çözüm

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\widehat{C}$

$(\sqrt{13})^2 = 4^2 + 1^2 - 2.4.1.\cos\widehat{C} \Rightarrow 13 = 17 - 8\cos\widehat{C}$

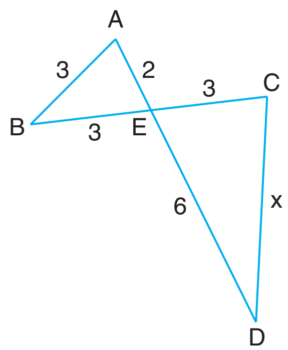
$8\cos\widehat{C} = 4$

$\cos\widehat{C} = \frac{1}{2}$

$m(\widehat{C}) = 60°$ bulunur.

Örnek

Yandaki şekilde $[BC] \cap [AD] = \{E\}$, $|AE| = 2$ cm, $|AB| = |BE| = |CE| = 3$ cm, $|ED| = 6$ cm ise $|CD| = x$ kaç cm dir?



Çözüm

AEB üçgeninde kosinüs teoreminden $3^2 = 2^2 + 3^2 - 2.2.3.\cos\widehat{E} \cdots (1)$

CED üçgeninde $x^2 = 3^2 + 6^2 - 2.3.6.\cos\widehat{E} \cdots (2)$ yazılabilir. Buna göre

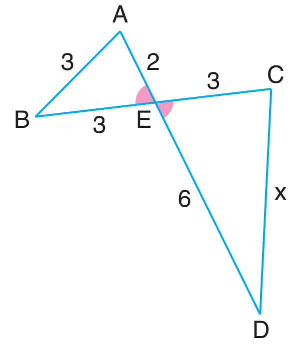
(1) den $9 = 4 + 9 - 12.\cos\widehat{E}$ ise $12\cos\widehat{E} = 4$ ise

$\cos\widehat{E} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ve

(2) den $x^2 = 9 + 36 - 36\cos\widehat{E} \quad \left(\cos\widehat{E} = \frac{1}{3}\right)$

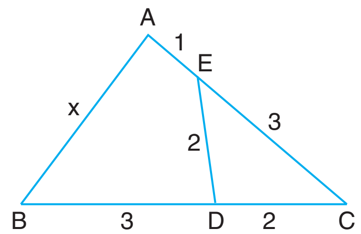
$x^2 = 45 - 36\cdot\frac{1}{3}$

$x^2 = 45 - 12$ ise $x^2 = 33$ ise $x = \sqrt{33}$ cm bulunur.



Örnek

Yandaki ABC üçgeninde $|AE| = 1$ cm, $|EC| = 3$ cm, $|ED| = |CD| = 2$ cm ise $|AB| = x$ kaç cm dir?



Çözüm

ECD üçgeninde kosinüs teoremine göre

$|ED|^2 = |CD|^2 + |CE|^2 - 2.|CD|.|CE|.\cos\widehat{C}$

$2^2 = 2^2 + 3^2 - 2.2.3.\cos\widehat{C} \Rightarrow 4 = 13 - 12.\cos\widehat{C} \Rightarrow \cos\widehat{C} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ olur.

ABC üçgeninde

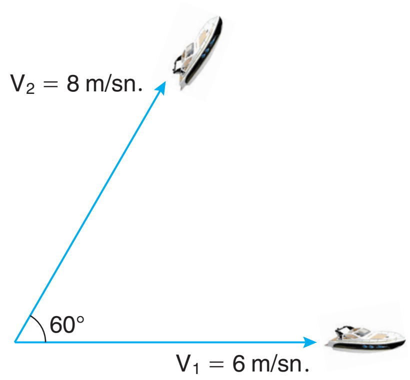
$x^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2.|AC|.|BC|.\cos\widehat{C}$

$x^2 = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\cos\widehat{C}$

$x^2 = 16 + 25 - 40\cdot\frac{3}{4} \quad \left(\cos\widehat{C} = \frac{3}{4}\right) \Rightarrow x^2 = 41 - 30$ ise $x^2 = 11 \Rightarrow x = \sqrt{11}$ cm bulunur.

Örnek

İki sürat teknesi, aralarında 60° olacak şekilde aynı noktadan hareket ediyor. Biri 6 m/sn., diğeri 8 m/sn. hızla hareket ediyor. 10 sn sonra bu sürat teknelerinin birbirinden kaç metre uzaklıkta olacağını bulalım.



Çözüm

Sürat teknelerinin 10 sn sonunda almış oldukları mesafeleri bulalım.

$x_1 = V_1.t = 6.10 = 60\,m$

$x_2 = V_2.t = 8.10 = 80\,m$

Bu problemi yandaki üçgenle modelleyelim.

Sürat tekneleri arasındaki mesafe $|BC| = x$ olur. Kosinüs teoremine göre

$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AC|.|AB|.\cos\widehat{A}$

$x^2 = 80^2 + 60^2 - 2.80.60.\cos 60°$

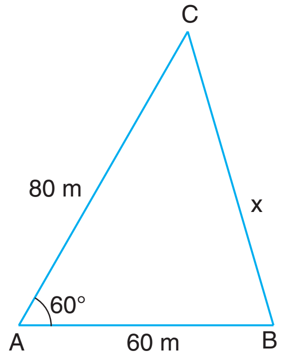
$x^2 = 6400 + 3600 - 9600\cdot\frac{1}{2}$

$x^2 = 10000 - 4800$

$x^2 = 5200$

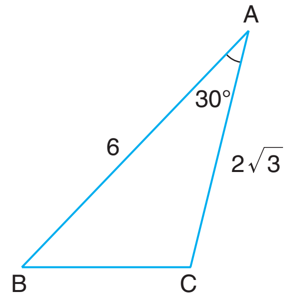
$x = \sqrt{5200}$

$x = 20\sqrt{13}\,m$ olur.

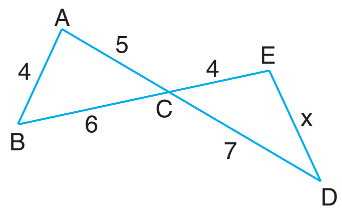


UYGULAYALIM 1-3

1. Yandaki ABC üçgeninde $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 2\sqrt{3}$ cm ve $m(\widehat{A}) = 30°$ olduğuna göre $|BC|$ kaç cm dir?

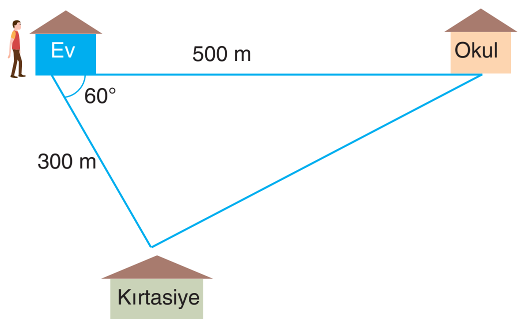


2. Yandaki şekilde A, C, D noktaları doğrusal, B, C ve E noktaları doğrusal, $|AC| = 5$ cm, $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|CE| = 4$ cm, $|CD| = 7$ cm olduğuna göre $|DE| = x$ kaç cm dir?



3. Bir ABC üçgeninde $|BC| = 3$ cm, $|AC| = 4$ cm ve $m(\widehat{C}) = 60°$ ise $|AB|$ kenarının uzunluğu kaç cm dir?

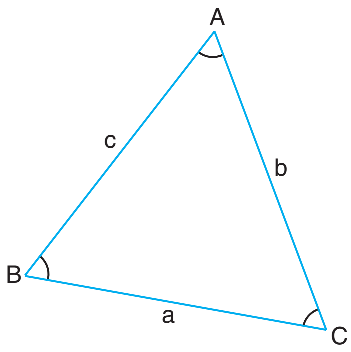
4. Alp'in evi ile okulu arasındaki en kısa mesafe 500 metre, evi ile kırtasiye arasındaki en kısa mesafe 300 metredir. Alp, okula gitmeden önce kırtasiyeye uğruyor. Alp'in evi, okulu ve kırtasiyenin bulunduğu noktalar şekildeki gibi modellendiğine göre kırtasiye ile okul arasındaki mesafe kaç metredir?



1.2.3. Sinüs Teoremi

Yandaki ABC üçgeninde $|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$ olmak üzere

$\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$ dır.



$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{1}{2}.b.c.\sin\widehat{A} = \dfrac{1}{2}.a.c.\sin\widehat{B} = \dfrac{1}{2}.a.b.\sin\widehat{C}$

olduğunu biliyoruz. Buna göre

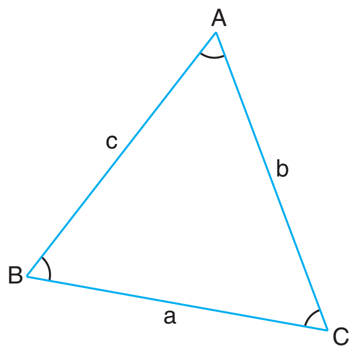
$\cancel{\dfrac{1}{2}}.b.\cancel{c}.\sin\widehat{A} = \cancel{\dfrac{1}{2}}.a.\cancel{c}.\sin\widehat{B}$ ise

$\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}}$ elde edilir. Benzer şekilde

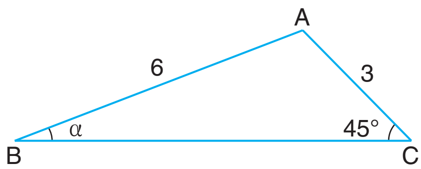
$\cancel{\dfrac{1}{2}}.\cancel{a}.c.\sin\widehat{B} = \cancel{\dfrac{1}{2}}.\cancel{a}.b.\sin\widehat{C}$ ise

$\dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$ dır.

O hâlde $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$ dır.



Örnek



Yukarıdaki ABC üçgeninde $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 3$ cm, $m(\widehat{C}) = 45°$ ise $\sin\alpha$ değeri kaçtır?

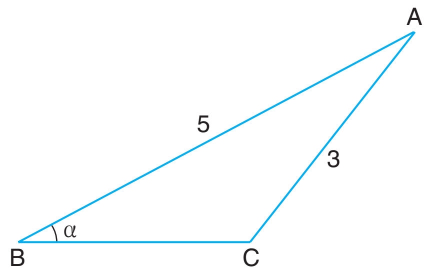
Çözüm

Sinüs teoremine göre

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \Rightarrow \frac{3}{\sin \alpha} = \frac{6}{\sin 45°}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{6} \cdot \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek



Yandaki ABC üçgeninde $m(\widehat{C}) - m(\widehat{B}) = 90°$, $|AB| = 5$ cm, $|AC| = 3$ cm ise $\tan \alpha$ kaçtır?

Çözüm

$m(\widehat{B}) = \alpha \Rightarrow m(\widehat{C}) = 90° + m(\widehat{B}) = 90° + \alpha$ olur.

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \Rightarrow \frac{3}{\sin \alpha} = \frac{5}{\sin(90° + \alpha)}$$

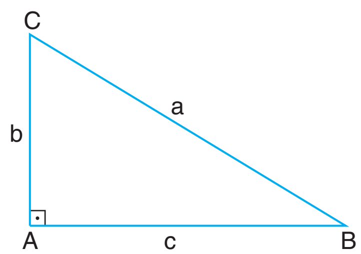
$$\frac{3}{\sin \alpha} = \frac{5}{\cos \alpha} \qquad (\sin(90° + \alpha) = \cos \alpha)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{5} \text{ bulunur.}$$

Örnek

Bir ABC üçgeninde $\sin^2(\widehat{B}) + \sin^2(\widehat{C}) = \sin^2(\widehat{A})$ ise $m(\widehat{A})$ kaç derecedir?

Çözüm



$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

$$\frac{a^2}{\sin^2(\widehat{A})} = \frac{b^2}{\sin^2(\widehat{B})} = \frac{c^2}{\sin^2(\widehat{C})}$$

$$\frac{b^2 + c^2}{\sin^2(\widehat{B}) + \sin^2(\widehat{C})} = \frac{a^2}{\sin^2(\widehat{A})}$$

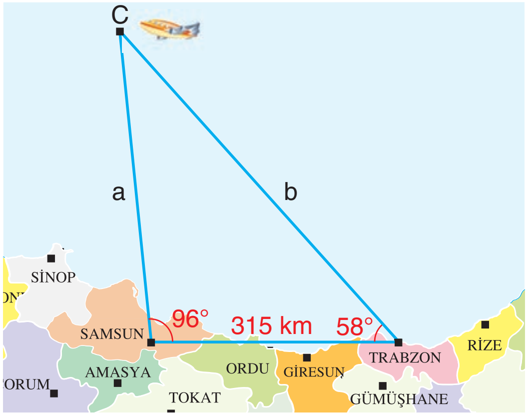
$$\frac{b^2 + c^2}{\sin^2(\widehat{A})} = \frac{a^2}{\sin^2(\widehat{A})} \qquad (\sin^2(\widehat{B}) + \sin^2(\widehat{C}) = \sin^2(\widehat{A}))$$

$b^2 + c^2 = a^2$dir.

Bu durumda $m(\widehat{A}) = 90°$ olur. (Pisagor teoremi)

Örnek

Şekilde görüldüğü gibi Trabzon'dan havalanan bir uçak doğrusal olarak şekildeki gibi ilerlemektedir. Pilot, C noktasına ulaştığında uçakta mekanik bir arıza olduğunun farkına varıyor. Pilot iniş için en yakında olan Samsun Havaalanını tercih ediyor. Haritada verilen bilgilere göre uçağın arıza yaptığı noktanın kalkış noktasına ve iniş noktasına olan uzaklığını bulalım.



Çözüm

$m(\widehat{C}) = 180° - (96° + 58°) = 26°$

Sinüs teoremine göre

$$\frac{315}{\sin 26°} = \frac{a}{\sin 58°} = \frac{b}{\sin 96°}$$

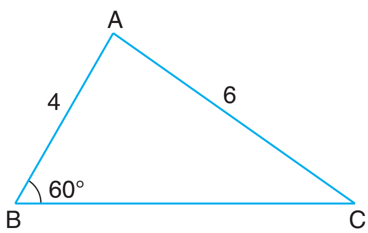
$$a = \frac{315.\sin 58°}{\sin 26°} \quad \text{ve} \quad b = \frac{315.\sin 96°}{\sin 26°}$$

$$a \backsimeq 609,4 \text{ km} \qquad b \backsimeq 714,6 \text{ km}$$

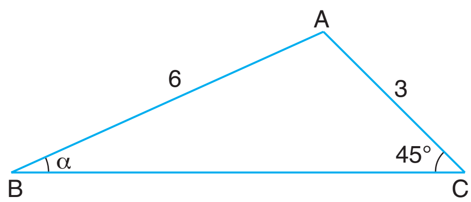
Hesap makinesinde sin tuşu kullanılarak $\sin 26°, \sin 58°$ ve $\sin 96°$ değerleri hesaplanabilir.

UYGULAYALIM 1-4

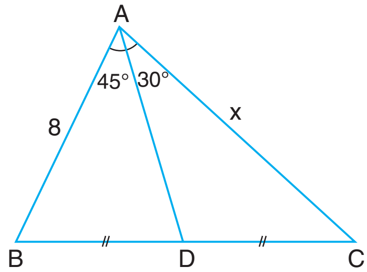
1. Yandaki ABC üçgeninde $|AB| = 4$ cm, $|AC| = 6$ cm ve $m(\widehat{B}) = 60°$ olduğuna göre $\sin \widehat{C}$ değeri kaçtır?



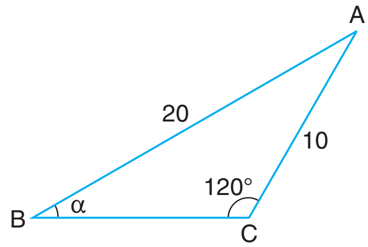
2. Yandaki ABC üçgeninde $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 3$ cm ve $m(\widehat{C}) = 45°$ olduğuna göre $\sin \alpha$ değeri kaçtır?



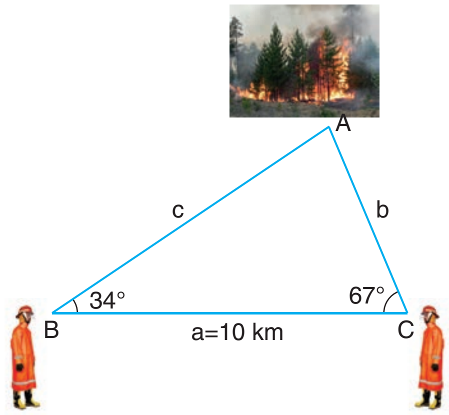
3. Yandaki ABC üçgeninde $m(\widehat{BAD}) = 45°, m(\widehat{DAC}) = 30°$ ve $|AB| = 8$ cm, $|BD| = |DC|$ olduğuna göre $|AC| = x$ kaç santimetredir?



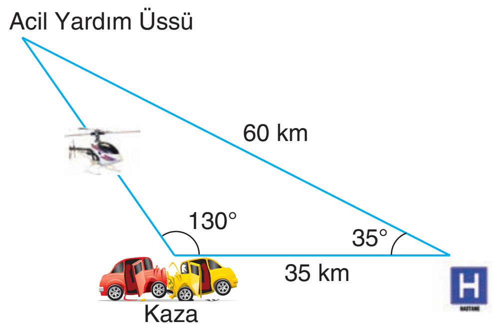
4. Yandaki ABC üçgeninde $|AB| = 20$ cm, $|AC| = 10$ cm ve $m(\widehat{BCA}) = 120°$ olduğuna göre $\sin\alpha$ değeri kaçtır?



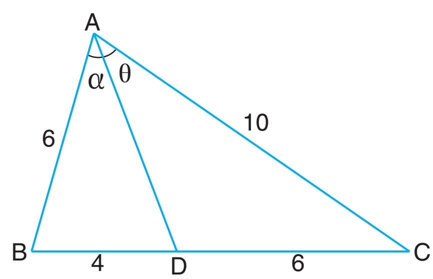
5. Yandaki şekilde bir orman yangını ve yangına müdahale etmek isteyen 2 itfaiye eri görülmektedir. Verilenlere göre her bir itfaiye erinin yangının olduğu A noktasına uzaklığını hesap makinesi kullanarak hesaplayınız.



6. Yandaki şekilde görüldüğü gibi acil yardım üssünden havalanan bir tıbbi yardım helikopteri, meydana gelen trafik kazasındaki yaralıları alarak hastaneye götürmek üzere hareket ediyor. Acil yardım üssünün kaza yerine uzaklığını hesap makinesi yardımıyla hesaplayınız.



7. Yandaki ABC üçgeninde $|AB| = |CD| = 6$ cm, $|BD| = 4$ cm ve $|AC| = 10$ cm olduğura göre $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta}$ değerini hesaplayınız.



1.2.4. Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Periyodik Fonksiyon

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. $\forall x \in A$ için

$f(x+T) = f(x)$ eşitliğini sağlayan en az bir $T \in \mathbb{R}^+$ reel sayısı varsa f fonksiyonuna **periyodik fonksiyon**, T sayısına ise **periyot** denir.

Bu eşitliği gerçekleyen birden fazla T reel sayısı varsa bunların pozitif olanlarının en küçüğüne **esas periyot** denir.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$ ve $\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x$ olduğundan $T = k \cdot 2\pi$ olup en küçük T sayısı $k = 1$ için 2π olur. Buna göre sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının esas periyodu 2π dir.

$k \in \mathbb{Z}^+$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $\tan(x + k \cdot \pi) = \tan x$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $x \neq k\pi$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $\cot(x + k \cdot \pi) = \cot x$ olduğundan tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının esas periyodu $k = 1$ için $T = 1 \cdot \pi = \pi$ dir.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

2π $\qquad$ 2π

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$\tan x$	0	tanımsız	0	tanımsız	0	tanımsız	0	tanımsız	0

π $\qquad$ π $\qquad$ π $\qquad$ π

Yukarıdaki tablolar incelendiğinde $[0, 2\pi]$ aralığında $\sin x$ in aldığı değerlerin $[2\pi, 4\pi]$ aralığında tekrar ettiğini, $[0, \pi]$ aralığında $\tan x$ in aldığı değerlerin de $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, $[3\pi, 4\pi]$ aralıklarında tekrar ettiğini görmekteyiz.

Örnek

$f(x) = \sin 2x$ ve $g(x) = \cos 3x$ fonksiyonlarının esas periyotlarını bulalım.

Çözüm

$\sin(x+T) = \sin x$ eşitliğini sağlayan en az bir $T \in \mathbb{R}^+$ bulmalıyız.

$\sin(2x) = \sin[2\cdot(x+T)] = \sin(2x+2T)$

$\sin(2x) = \sin(2x+2\pi)$ olduğundan

$\sin(2x+2\pi) = \sin(2x+2T) \Rightarrow 2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi$

$f(x) = \sin(2x)$ in esas periyodu π olur.

$\cos(x+T) = \cos x$ eşitliğini sağlayan en az bir $T \in \mathbb{R}^+$ bulalım.

$\cos(3x) = \cos[3\cdot(x+T)] = \cos(3x+3T)$

$\cos(3x) = \cos(3x+2\pi)$ olduğundan

$\cos(3x+2\pi) = \cos(3x+3T) \Rightarrow 3T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$

$g(x) = \cos(3x)$ in esas periyodu $\frac{2\pi}{3}$ olur.

SONUÇ

$a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0, b \neq 0$ ve esas periyot T olmak üzere

$f(x) = a\cdot\sin(bx+c)+k$ ise $T = \frac{2\pi}{|b|}$,

$f(x) = a\cdot\cos(bx+c)+k$ ise $T = \frac{2\pi}{|b|}$ dir.

Örnek

$f(x) = 2\cdot\cos(2x-1)$ fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

Çözüm

Esas periyot T olmak üzere

$f(x) = 2\cdot\cos(\underset{\substack{\downarrow \\ a}}{2}x-1) \Rightarrow n = 1$ tek sayı olduğundan $T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$ olur.

Örnek

$f(x) = \tan 2x$ ve $g(x) = \cot \frac{x}{2}$ fonksiyonlarının esas periyotlarını bulalım.

Çözüm

$\tan(x + T) = \tan x$ eşitliğini sağlayan en az bir $T \in \mathbb{R}^+$ bulmalıyız.

$\tan(2x) = \tan[2 \cdot (x + T)] = \tan(2x + 2T)$

$\tan(2x) = \tan(2x + \pi)$ olduğundan

$\tan(2x + 2T) = \tan(2x + \pi) \Rightarrow 2T = \pi \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$

$f(x) = \tan(2x)$ fonksiyonunun esas periyodu $\frac{\pi}{2}$ olur.

Şimdi de $\cot(x + T) = \cot x$ eşitliğini sağlayan en az bir $T \in \mathbb{R}^+$ bulalım.

$\cot \frac{x}{2} = \cot \frac{x + T}{2} = \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{T}{2}\right)$ olur.

$\cot \frac{x}{2} = \cot\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$ olduğundan

$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{T}{2}\right) = \cot\left(\frac{x}{2} + \pi\right) \Rightarrow \frac{T}{2} = \pi \Rightarrow T = 2\pi$

$g(x) = \cot \frac{x}{2}$ in esas periyodu 2π olur.

SONUÇ

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, b \neq 0$ ve T esas periyot olmak üzere

$f(x) = a \cdot \tan(bx + c) + k$ veya $f(x) = a \cdot \cot(bx + c) + k$ ise $T = \frac{\pi}{|b|}$ dır.

Örnek

$f(x) = \tan(1 - 6x)$ fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

Çözüm

$f(x) = \tan(1 - 6x)$

$a = -6$ dır. Buna göre $T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|-6|} = \frac{\pi}{6}$ olur.

$f(x)$ ve $g(x)$ periyodik fonksiyonlar olmak üzere $f(x) \pm g(x)$ fonksiyonu da periyodik ise bu fonksiyonun esas periyodu $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının esas periyotlarının en küçük ortak katına eşittir.

Örnek

$f(x) = 3\tan(2x + 10) - \sin(3x - 2)$ fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

Çözüm

$3\tan(2x + 10)$ fonksiyonunun esas periyodu T_1, $\sin(3x - 2)$ fonksiyonunun esas periyodu T_2 olsun.

$T_1 = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$ ve $T_2 = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$ tür.

$f(x)$ fonksiyonunun esas periyodu,

$$\text{OKEK}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\text{OKEK}(\pi, 2\pi)}{\text{OBEB}(2,3)} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ olur.}$$

$\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ rasyonel sayılar olmak üzere

$$\text{OKEK}\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{\text{OKEK}(a, c)}{\text{OBEB}(b, d)} \text{ dir.}$$

Kosinüs Fonksiyonunun Grafiği

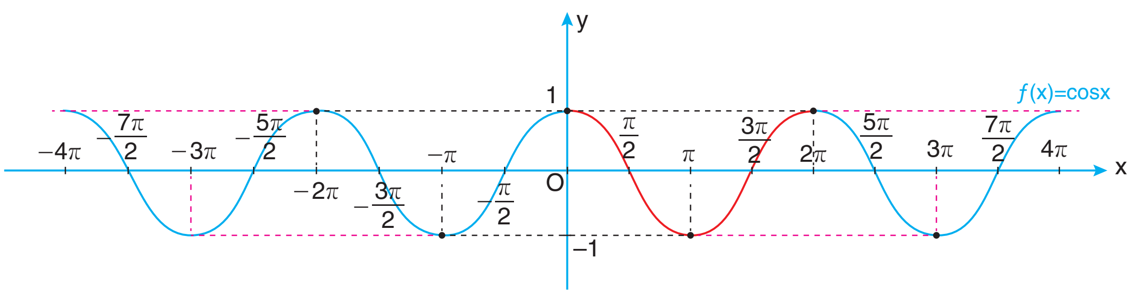
$f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun esas periyodu $T = 2\pi$ olduğundan grafiği $[0, 2\pi]$ aralığında çizilerek 2π periyotlarla tekrarlanır.

$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ için değer tablosunu aşağıdaki gibi oluşturalım.

cosx, 0 ve 2π için 1, $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{3\pi}{2}$ için 0, π için –1 değerini alır. Buna göre değer tablosu aşağıdaki gibi olur.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cosx	1	0	–1	0	1

Tabloya göre cos x fonksiyonunun grafiği, $(0, 1)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $(\pi, -1)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$, $(2\pi, 1)$ noktalarından geçerek 2π periyotlarla tekrarlanır.



Grafik incelendiğinde $\cos(-x) = \cos x$ olduğu görülmektedir.

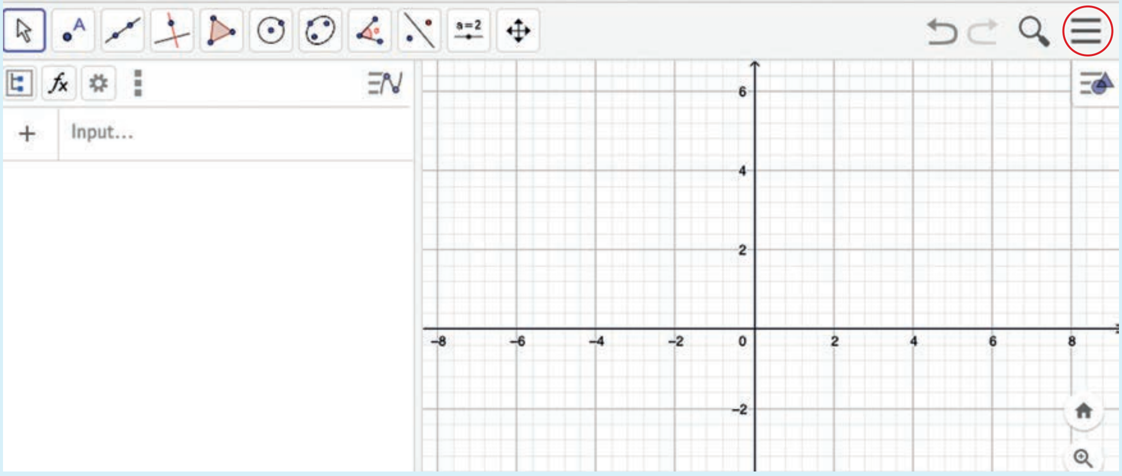
Buna göre kosinüs fonksiyonu çift fonksiyondur.

Örnek

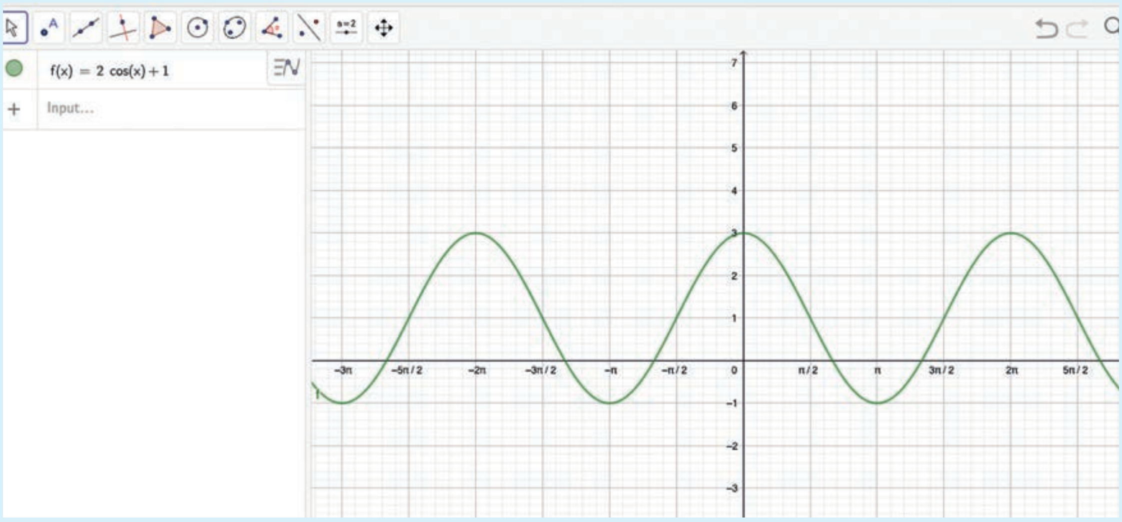
$f(x) = 2\cos x + 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak bir Dinamik Matematik ve Geometri Programı açalım. Sağdaki daire içinde gösterilen menüyü kullanarak x eksenindeki değerleri radyan cinsinden oluşturalım.



$f(x) = 2\cos x + 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. Bunun için giriş alanına $f(x) = 2\cos x + 1$ verisini girelim. Aşağıdaki grafik elde edilir.



Grafiğin 2π periyotlarla tekrarlandığını görmekteyiz.

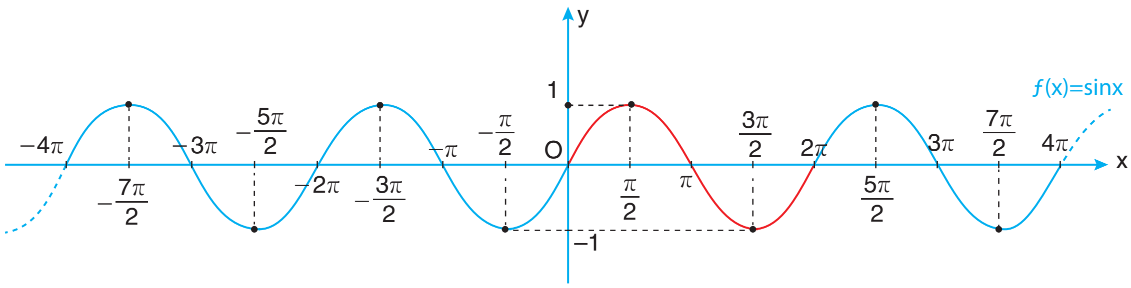
Yandaki karekodu tabletinize okutarak eba.gov.tr adresine bağlanınız. Konuyla ilgili videoyu izleyiniz. Buradan arama motorunu kullanarak diğer konularla ilgili videolara da ulaşabilirsiniz.

Sinüs Fonksiyonunun Grafiği

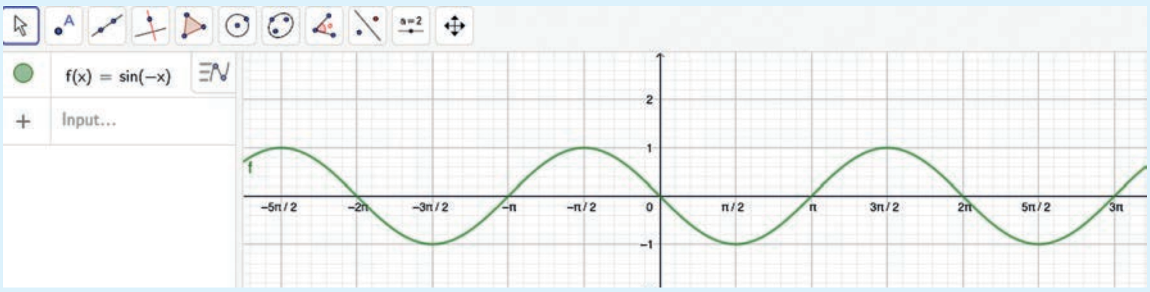
$f:\mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun esas periyodu $T = 2\pi$ olduğundan grafik $[0, 2\pi]$ aralığında çizilerek 2π periyotlarla tekrarlanır. $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ve 2π için sinx fonksiyonunun aldığı değerleri değer tablosunda gösterelim.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx	0	1	0	–1	0

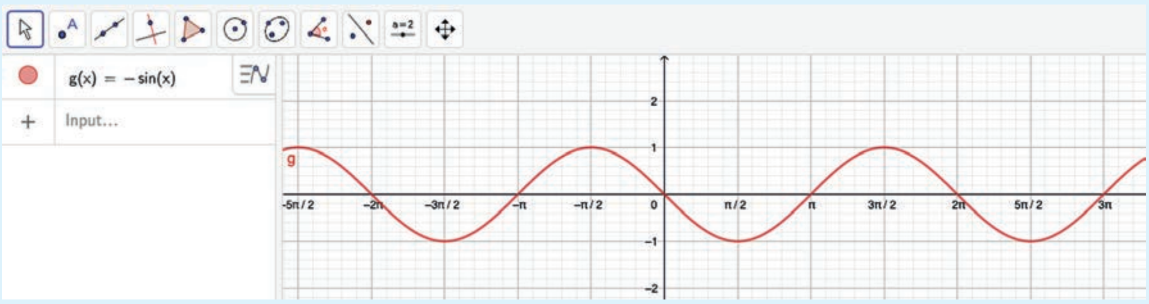
Tabloya göre sinx fonksiyonunun grafiği $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, $(\pi,0)$, $\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$, $(2\pi,0)$ noktalarından geçerek 2π periyotlarla tekrarlanır.



Dinamik Matematik ve Geometri Programından yararlanarak $\sin(-x)$ ve $-\sin x$ fonksiyonlarının grafiklerini oluşturalım. Bunun için giriş alanına önce $\sin(-x)$ yazarak "Enter" tuşuna basalım.



Yeni bir giriş sayfası açalım ve giriş alanına $-\sin x$ yazıp "Enter" tuşuna basalım.



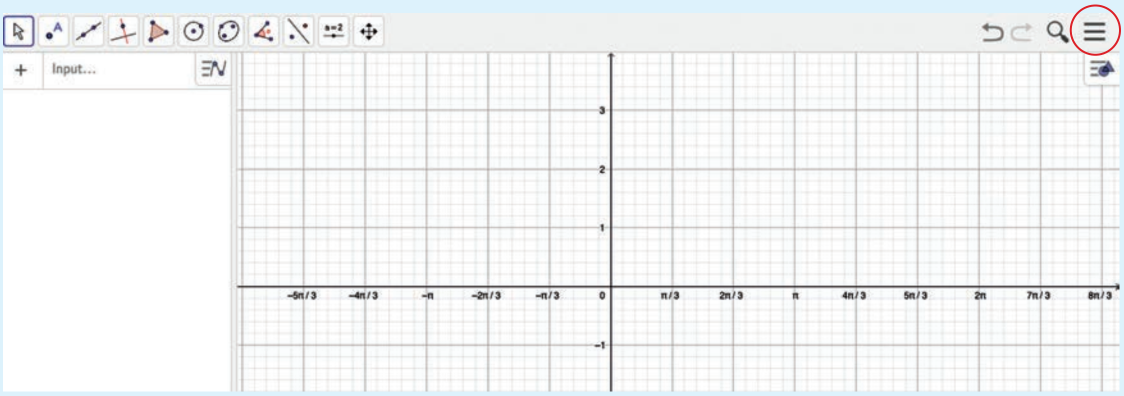
Grafik incelendiğinde $\sin(-x) = -\sin x$ olduğu görülür. Buna göre sinüs fonksiyonu tek fonksiyondur.

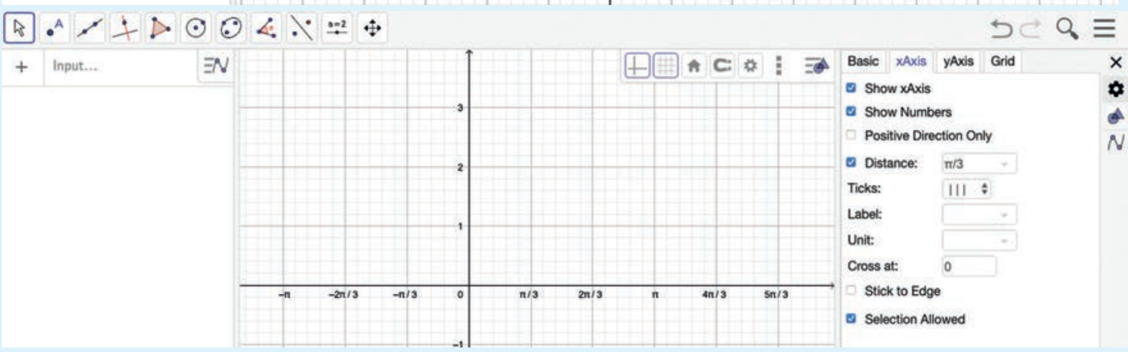
Örnek

$f(x) = \sin 3x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

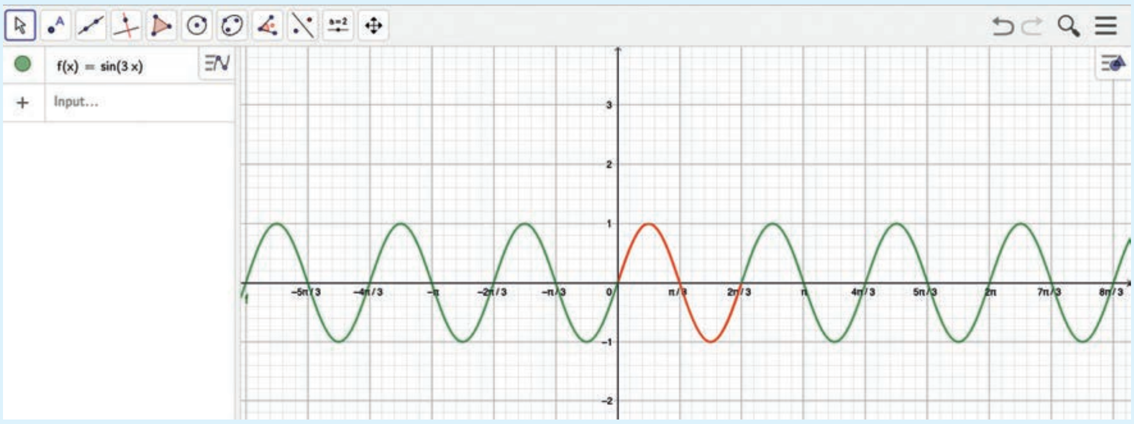
Çözüm

Dinamik Matematik ve Geometri Programını açalım. x ekseninin birimlerini radyan cinsinden düzenleyelim. Bunun için daire içindeki butonu tıklayıp açılan ayarlar menüsünden yararlanabiliriz.





Giriş alanına $\sin(3x)$ yazarak grafiği oluşturalım.



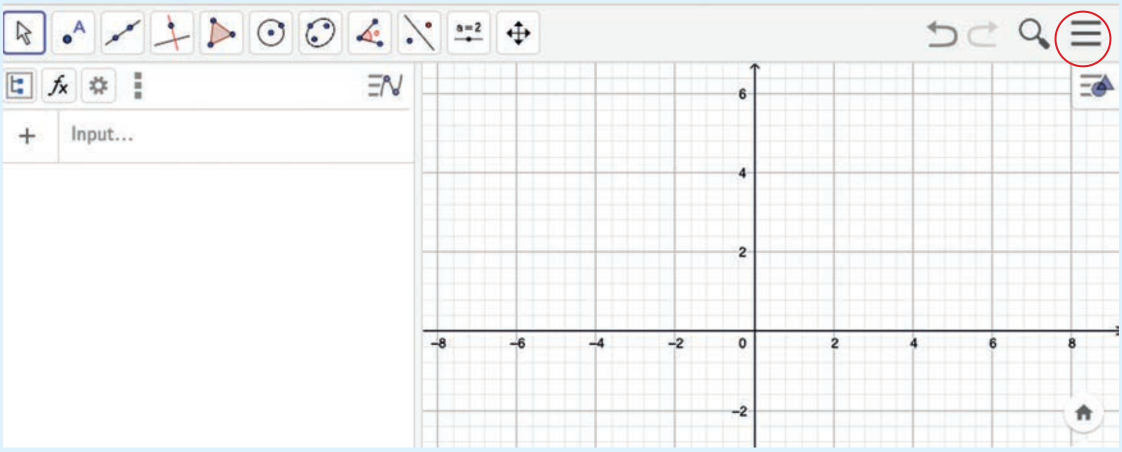
Grafiği incelediğimizde $\frac{2\pi}{3}$ periyotlarla tekrar ettiğini görmekteyiz.

Örnek

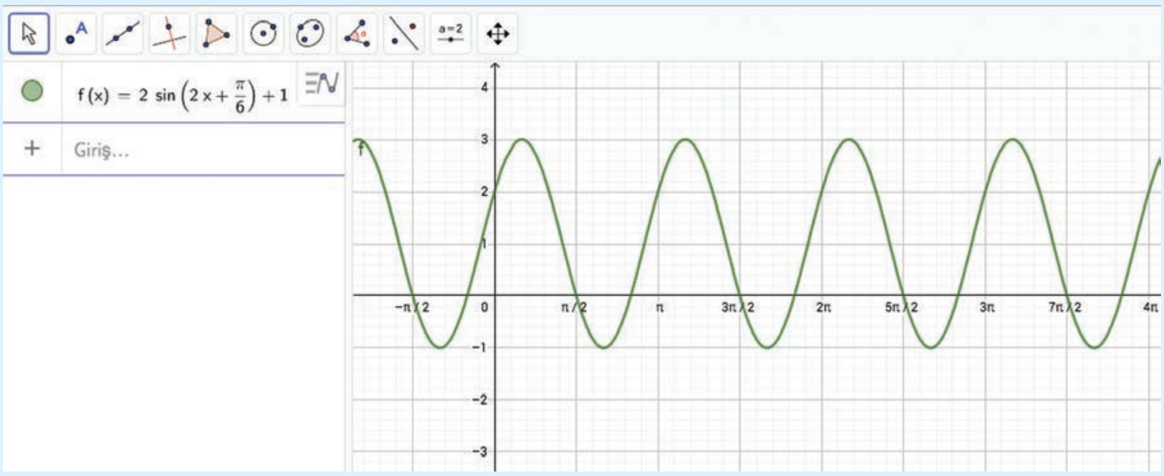
$f(x) = 2.\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

Dinamik Matematik ve Geometri Programını açalım. Sağdaki daire içinde gösterilen menüyü kullanarak x eksenindeki değerleri radyan cinsinden oluşturalım.



Giriş alanına $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ yazarak grafiği oluşturalım.



Grafiğin π periyotlarla tekrar ettiğini görmekteyiz.

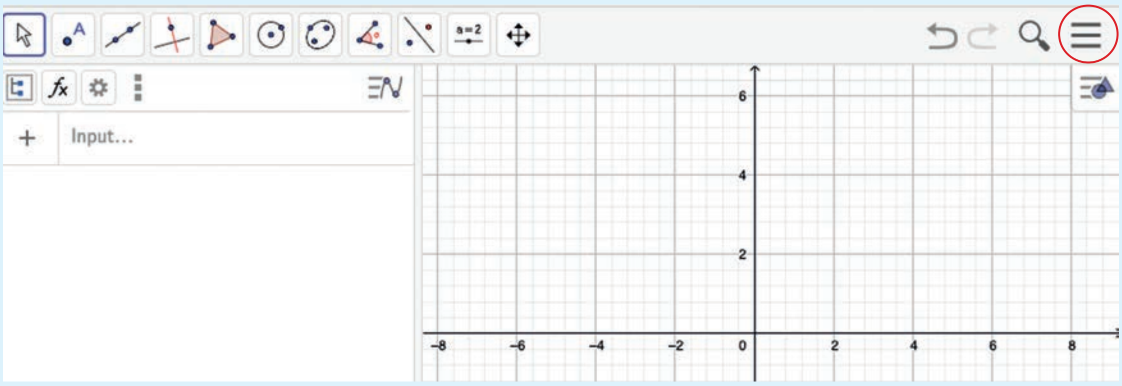
Örnek

$f(x)=\sin 2x,\ \ g(x)=\sin 2x+1,\ \ h(x)=\sin 2x+2,\ \ p(x)=\sin 2x-1$

fonksiyonlarının grafiklerini, $[0,\pi]$ aralığında ve aynı koordinat sistemi üzerinde çizelim.

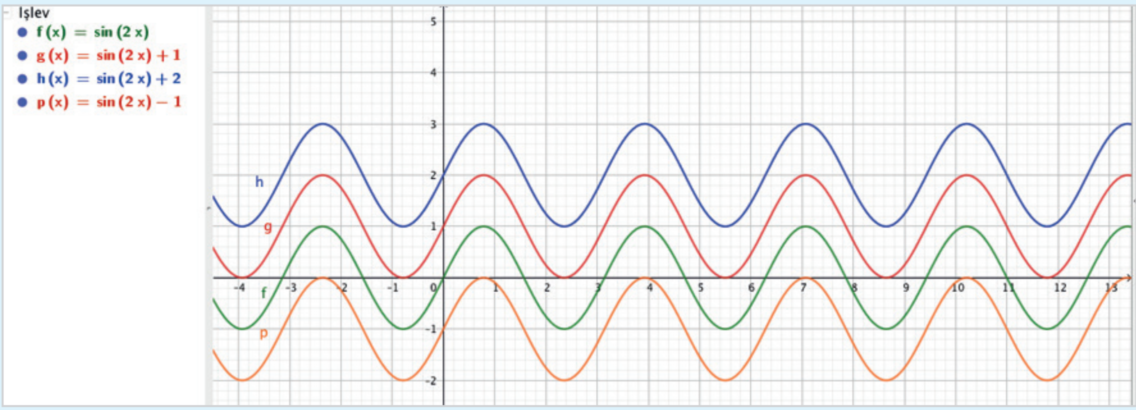
Çözüm

Dinamik Matematik ve Geometri Programını açalım. Sağdaki daire içinde gösterilen menüyü kullanarak x eksenindeki değerleri radyan cinsinden oluşturalım.



Giriş alanına önce sin(2x) yazarak "Enter" tuşuna basalım. Böylece sin(2x) fonksiyonunun grafiğini oluşturmuş oluruz. Giriş alanına açılan ikinci satıra sin(2x)+1 yazarak tekrar "Enter" tuşuna basalım. Aynı ekranda sin(2x)+1 fonksiyonunun grafiğini oluşturmuş oluruz. Aynı şekilde giriş alanına açılan üçüncü ve dördüncü satırlara da sırası ile sin(2x)+2 ve sin(2x – 1) yazarak bu fonksiyonların grafiklerinin oluşturalım.

Tabloya göre $f(x), g(x), h(x)$ ve $p(x)$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibi olur.



Grafiğin π periyotlarla tekrar ettiğini görmekteyiz.

SONUÇ

$f(x)=a\sin(bx+c)+k$ türündeki fonksiyonların grafiği çizilirken önce $a\sin(bx+c)$ fonksiyonunun grafiği çizilerek elde edilen grafik y ekseni boyunca k birim ötelenir.

Örnek

Aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini bilgi iletişim teknolojilerinden yararlanarak çizelim.

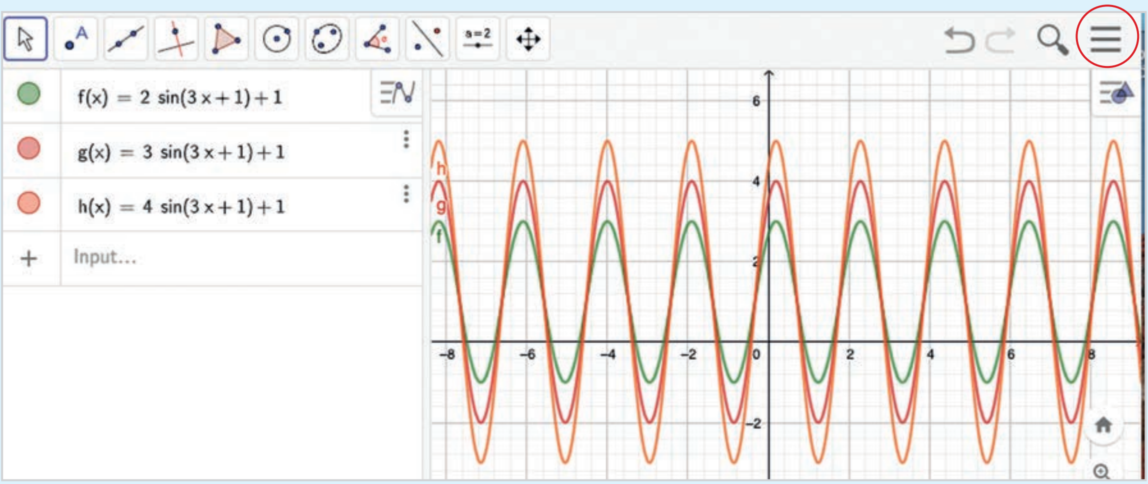
a) $f(x) = 2\sin(3x+1)+1,\ g(x) = 3\sin(3x+1)+1,\ h(x) = 4\sin(3x+1)+1$

b) $f(x) = 2\sin(3x+1)+1,\ g(x) = 2\sin(3x+1)+2,\ h(x) = 2\sin(3x+1)+3$

Çözüm

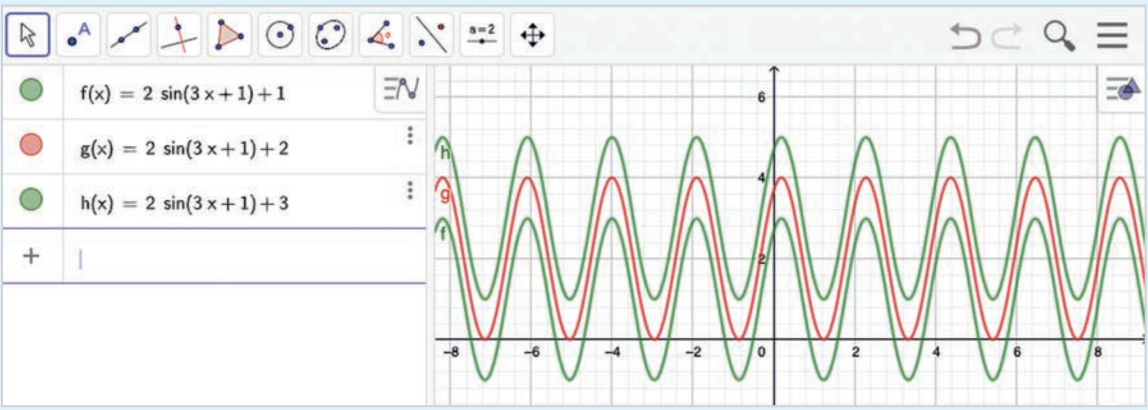
Dinamik Matematik ve Geometri Programını açalım. Sağdaki daire içinde gösterilen menüyü kullanarak x eksenindeki değerleri radyan cinsinden oluşturalım.

a) Giriş alanına önce 2sin(3x+1)+1 yazıp "Enter" tuşuna basalım. Giriş alanında açılan ikinci satıra 3sin(3x+1)+1 yazıp "Enter" tuşuna basalım. Üçüncü satıra da 4sin(3x+1)+1 yazarak "Enter" tuşuna basalım. $f(x), g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının grafikleri şekildeki gibi çizilmiş olacaktır.



Sin x fonksiyonunun kat sayısı büyüdükçe değer kümesinin genişlediği, küçüldükçe değer kümesinin daraldığı görülmektedir.

b) Yeni bir ekran açarak benzer şekilde giriş alanına sırası ile 2sin(3x+1)+1, 2sin(3x+1)+2, 2sin(3x+1)+3 fonksiyonlarını teker teker yazalım. $f(x), g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının grafikleri şekildeki gibi çizilmiş olur.



Sabit terim arttıkça grafiğin aynı oranda y ekseni boyunca yukarı hareket ettiği görülmektedir.

Örnek

Aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini bilgi iletişim teknolojilerinden yararlanarak çizelim.

a) $f(x) = \cos x + 1, \quad g(x) = \cos x + 2, \quad h(x) = \cos x - 1$

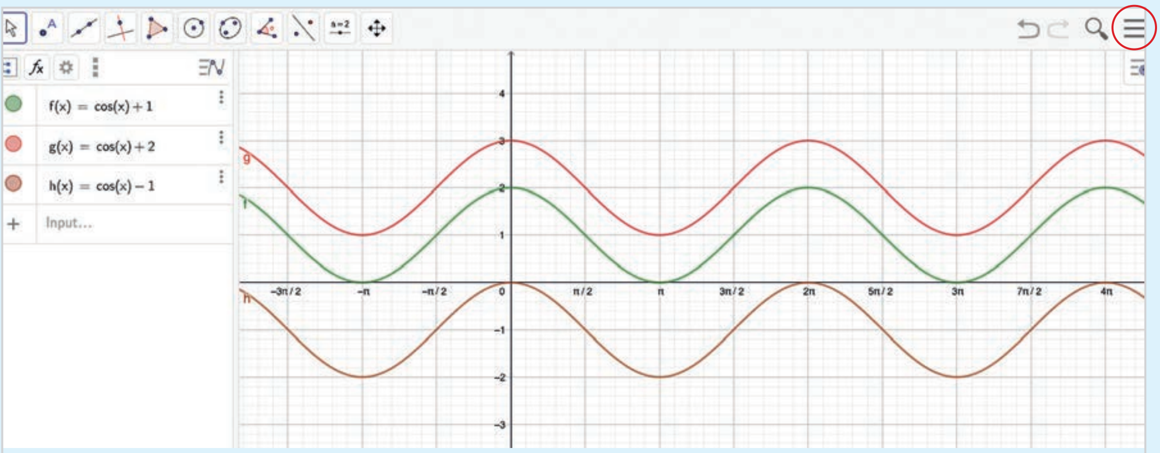
b) $f(x) = \cos(2x) + 1, \quad g(x) = \cos(3x) + 1$

Çözüm

Dinamik Matematik ve Geometri Programını açalım. Sağdaki daire içinde gösterilen menüyü kullanarak x eksenindeki değerleri radyan cinsinden oluşturalım.

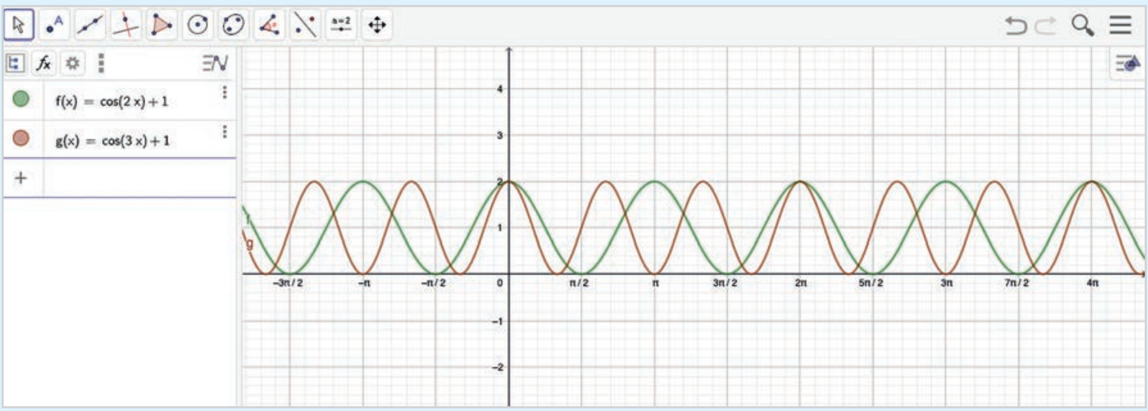
a) Giriş alanına sırası ile $\cos(x) + 1$ yazıp “Enter” tuşuna basalım.

Aynı işlemi $\cos(x) + 2, \cos(x) - 1$ için tekrarlayalım.



Sabit terimin anladığı değere göre grafiğinin yukarı aşağı hareket ettiğini gözlemleyebiliriz.

b) Ana ekrana dönerek giriş alanına sırası ile $\cos(2x) + 1$ ve $\cos(3x) + 1$ yazalım. Herbir kuralı yazdıktan sonra “Enter” tuşuna basmayı unutmayalım.



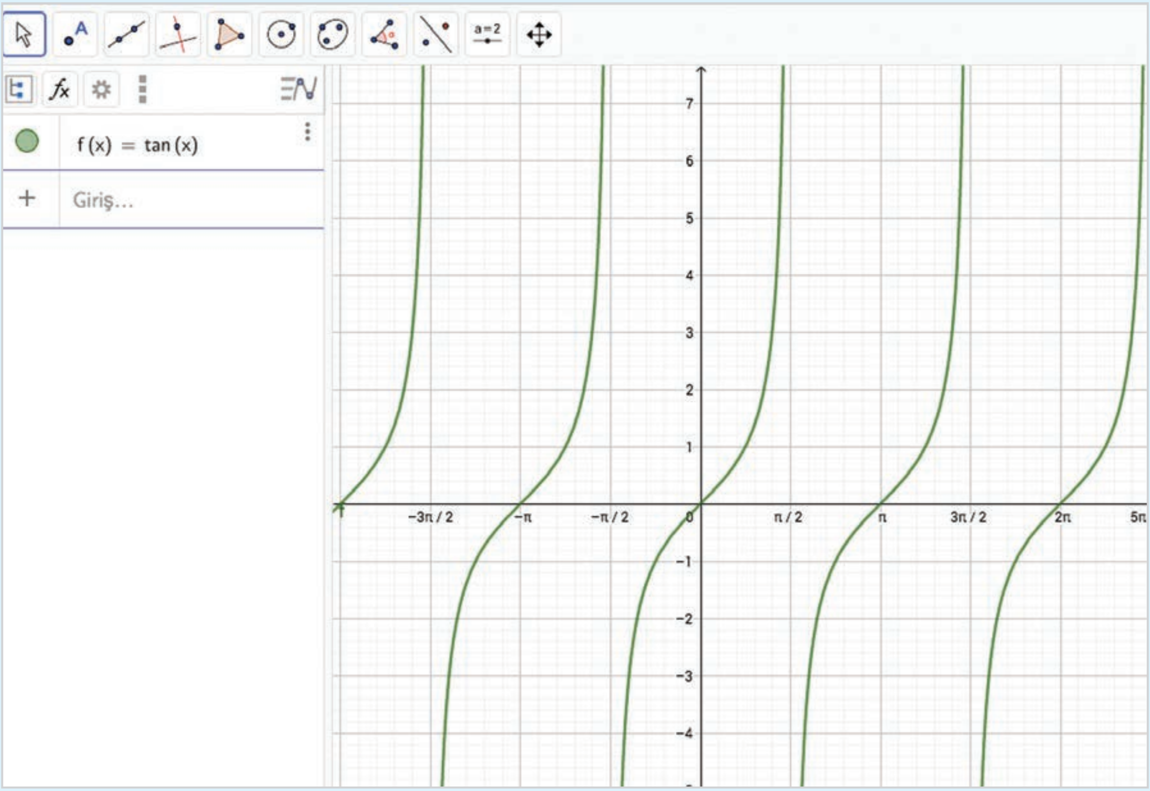
x in katsayısının büyüdükçe grafiğinin kollarının birbirine yaklaştığını gözlemleyiniz.

$a \cdot \cos(bx + c) + k$ türünden bir fonksiyon yazınız. a, b, c ve k yerine farklı değerler vererek yeni grafikler oluşturunuz. Bu değerlere göre grafikte meydana gelen değişimi yorumlayınız.

Tanjant Fonksiyonunun Grafiği

$f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\tan x$ fonksiyonunun esas periyodu $T=\pi$ olduğundan grafiği $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ aralığında çizilerek grafik π periyotlarla tekrarlanır. Tanjant fonksiyonu $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$ için tanımsızdır.

Dinamik Matematik ve Geometri Programını açalım. Fonksiyon giriş alanına $\tan x$ yazarak bu fonksiyonun grafiğini oluşturalım.



Grafiğe göre $\tan(-x)=-\tan x$ olduğundan tanjant fonksiyonu tek fonksiyondur.

Örnek

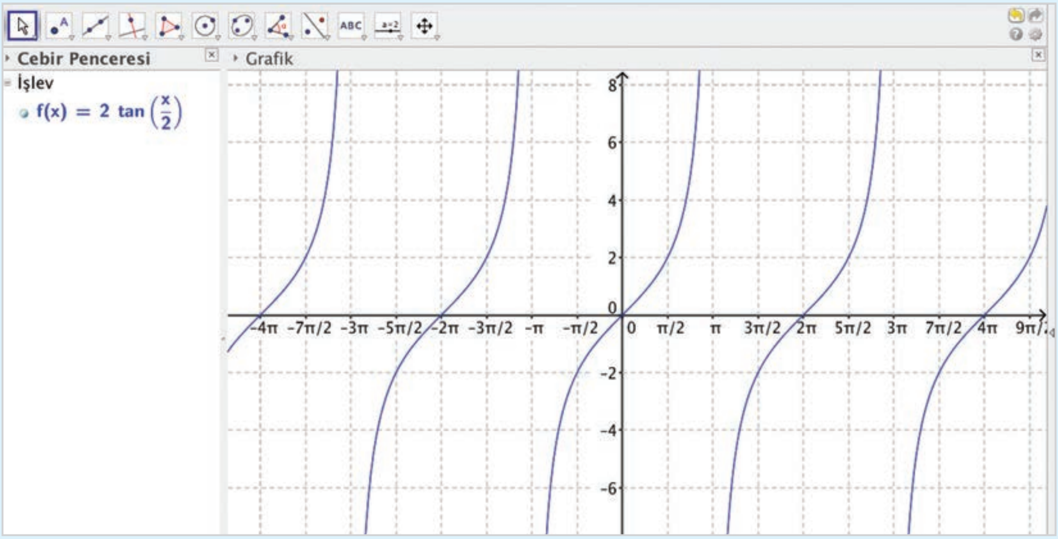
$f(x)=2\tan\frac{x}{2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

$f(x)$ fonksiyonunun esas periyodu,

$T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$ dir.

Dinamik Matematik ve Geometri Programı giriş alanına $2\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ yazalım.



π ve 3π için $f(x)$ tanımsızdır. $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin 2π periyotla tekrar ettiğini görmekteyiz.

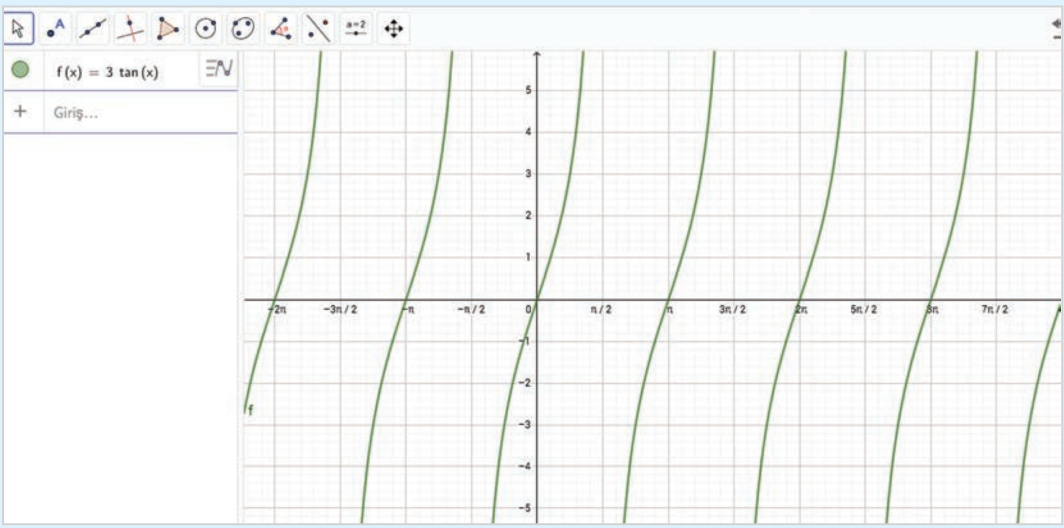
Örnek

$f(x) = 3\cdot\tan x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim

Çözüm

$f(x) = 3\cdot\tan x$ fonksiyonunun esas periyodu, $T = \frac{\pi}{1} = \pi$ dir.

Dinamik Matematik ve Geometri Programı giriş alanına $3\tan(x)$ yazarak grafiği oluşturalım.



$-\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{2}$ için $f(x)$ tanımsızdır. $f(x)$ fonksiyonunun grafiği π periyotlarla tekrar etmektedir.

Örnek

Aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini bilgi iletişim teknolojilerinden yararlanarak çizelim.

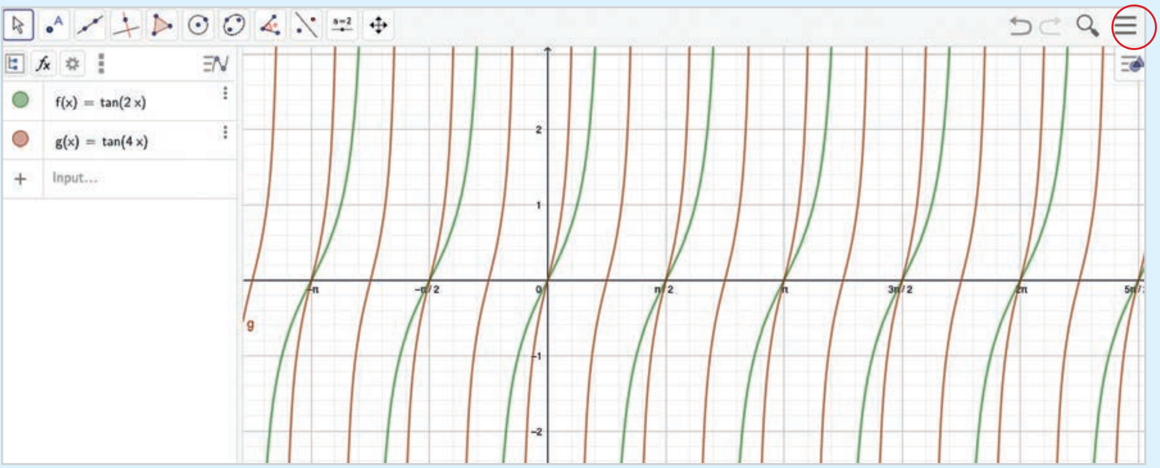
a) $f(x) = \tan(2x)$, $g(x) = \tan(4x)$

b) $f(x) = \tan x + 2$, $g(x) = \tan x + 3$, $h(x) = \tan x + 4$

Çözüm

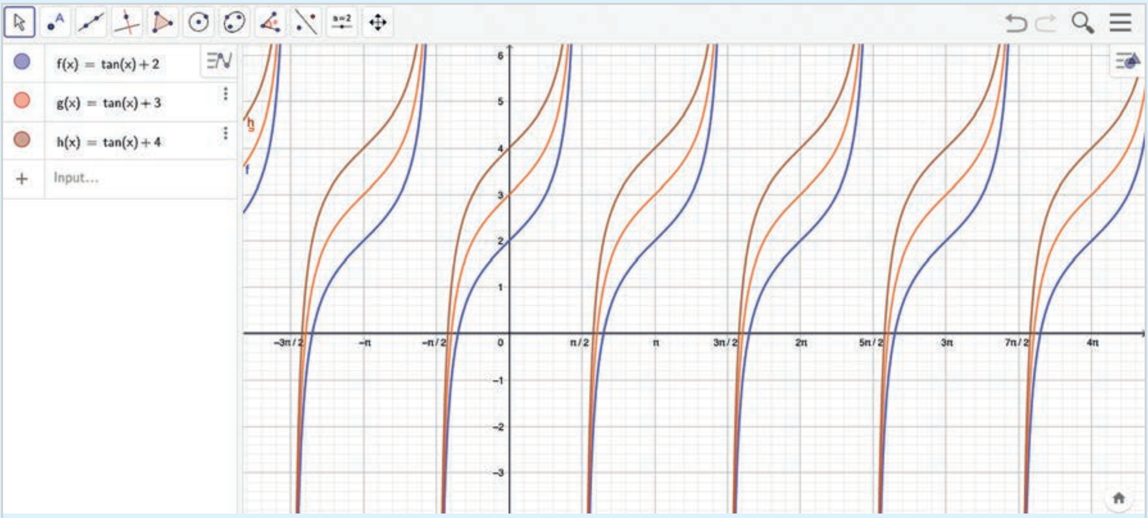
Dinamik Matematik ve Geometri Programını açalım. Sağdaki daire içinde gösterilen menüyü kullanarak x eksenindeki değerleri radyan cinsinden oluşturalım.

a) Giriş alanına sırası ile tan(2x) ve tan(4x) yazarak fonksiyonların grafiklerini oluşturalım. Herbir fonksiyonun kuralını yazdıktan sonra “Enter” tuyuna basmayı unutmayalım.



x in katsayısı büyüdükçe grafiğin kollarının birbirine yaklaştığını gözlemleyiniz.

b) Ana ekrana gelerek giriş alanına sırası ile $\tan(x) + 2$, $\tan(x) + 3$ ve $\tan(x) + 4$ yazınız.

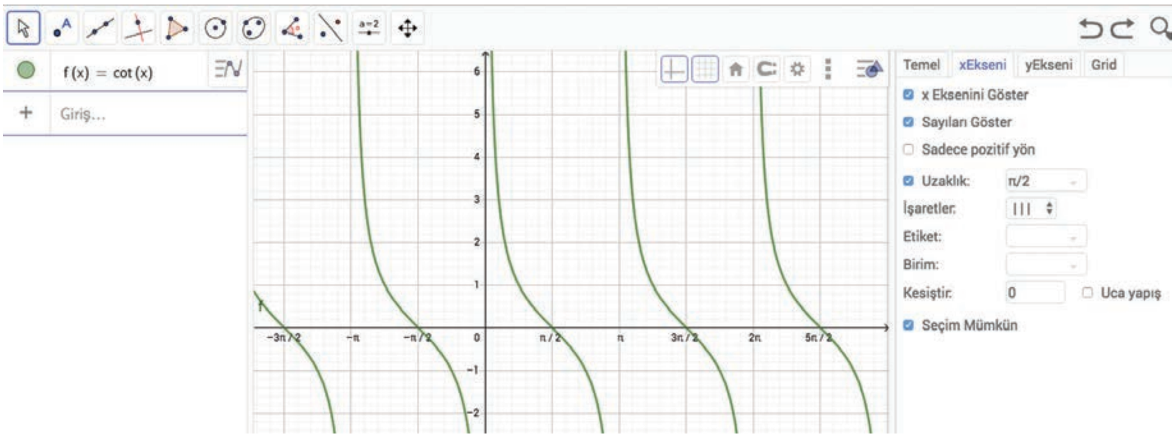


Sabit terimin aldığı değere göre grafiğin kollarının hareketini yorumlayınız.

Kotanjant Fonksiyonunun Grafiği

$f: (0, \pi) \to \mathbb{R},\ f(x) = \cot x$ fonksiyonunun periyodu $T = \pi$ olduğundan grafik $(0, \pi)$ aralığındadır ve aynı grafik sola ve sağa doğru π periyotlarla çizilir. Kotanjant fonksiyonu $k \cdot \pi (k \in \mathbb{Z})$ için tanımsızdır.

Dinamik Matematik ve Geometri Programından yararlanarak fonksiyon giriş alanına $\cot x$ yazınca aşağıdaki grafik elde edilir.



Grafiğe göre $\cot(-x) = -\cot x$ olduğundan kotanjant fonksiyonu tek fonksiyondur.

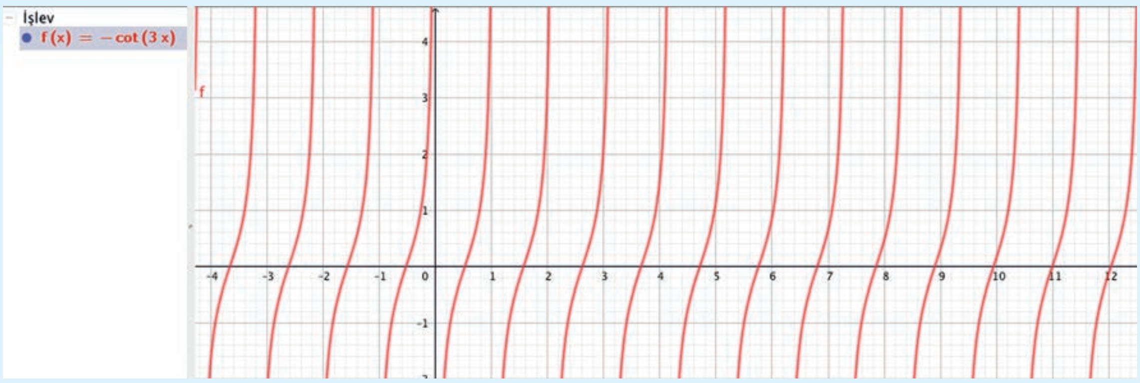
Örnek

$f(x) = -\cot 3x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

$f(x)$ fonksiyonunun esas periyodu, $T = \dfrac{\pi}{3}$ tür.

Dinamik Matematik ve Geometri Programı giriş alanına $-\cot 3x$ yazarak grafiği oluşturalım.



$f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $\dfrac{\pi}{3}$ periyotla tekrar ettiğini görmekteyiz.

UYGULAYALIM 1-5

1. Aşağıdaki fonksiyonların esas periyotlarını bulunuz.

a) $\sin(3x-1)$

b) $3\cos^2(4x+5)$

c) $-\tan^3(2x+3)-1$

ç) $\cot^4(3x+2)$

2. $f(x)=\cos 2x-6\sin 5x$ fonksiyonunun esas periyodunu bulunuz.

3. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini bilgi ve iletişim teknolojilerini kullanarak çiziniz.

a) $f(x)=2+\cos 2x$

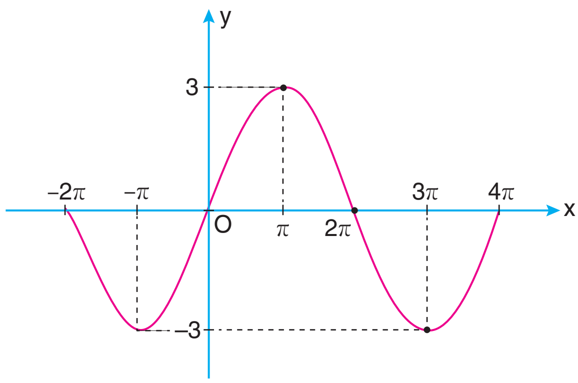
b) $g(x)=4\cdot\sin 3x$

c) $h(x)=1+2\tan x$

ç) $t(x)=1+2\tan x$

d) $n(x)=\cot 3x$

4.



Yukarıdaki grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine ait olabilir?

A) $y=2\sin 2x$

B) $y=3\sin 2x$

C) $y=3\sin 4x$

D) $y=3\cos\dfrac{x}{2}$

E) $y=3\sin\dfrac{x}{2}$

1.2.5. Sinüs, Kosinüs, Tanjant Fonksiyonlarının Ters Fonksiyonları

Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için fonksiyonun bire bir ve örten olması gerekir. Trigonometrik fonksiyonlar $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bire bir ve örten olmadıkları için $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye trigonometrik fonksiyonların tersi fonksiyon değildir.

Trigonometrik fonksiyonların tanım kümelerinin bire bir ve örten olan alt kümelerinden biri tanım kümesi olarak seçildiğinde fonksiyonların bu kümede ters fonksiyonları bulunur.

Sinüs Fonksiyonunun Tersi

Sinüs fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu aralıklardan biri $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dır. Buna göre

$f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonu bire bir ve örtendir. Sinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu arksinüs fonksiyonudur.

Sinüs fonksiyonunun tersi **arcsin** ile gösterilir.

$\arcsin: [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x) = \arcsin x$ tir.

$$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$$

Örnek

$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = x$ olsun. x değerini bulalım. $y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$ olduğundan

$\sin x = \frac{1}{2}$ olur. $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan $x = \frac{\pi}{6}$ olmalıdır. Buna göre $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ dır.

Örnek

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x$ olsun. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ olur. $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan $x = -\frac{\pi}{4}$ olmalıdır.

Buna göre $x = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ tür.

Örnek

$x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ olduğuna göre x değerini bulalım.

Çözüm

$x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ nda $x = \frac{\pi}{3}$ için $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan $x = \frac{\pi}{3}$ tür.

Kosinüs Fonksiyonunun Tersi

Kosinüs fonksiyonu $[0, \pi]$ nda bire bir ve örtendir.

Buna göre $f:[0,\pi] \to [-1,1]$, $f(x) = \cos x$ bire bir ve örtendir. Kosinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu arkkosinüs fonksiyonudur. Kosinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu **arccos** şeklinde gösterilir.

$f^{-1}:[-1,1] \to [0,\pi]$, $f^{-1}(x) = \arccos x$ tir.

$\mathbf{y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y}$

Örnek

$\arccos(0)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\arccos(0) = x$ olsun. $\arccos(0) = x \Leftrightarrow \cos x = 0$ dır.

$[0, \pi]$ nda, $x = \frac{\pi}{2}$ için $\cos x = 0$ olduğundan $x = \frac{\pi}{2}$ olur. Buna göre $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ dir.

Örnek

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = x \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ dir.

$[0, \pi]$ nda $x = \frac{2\pi}{3}$ için $\cos x = -\frac{1}{2}$ olduğundan $x = \frac{2\pi}{3}$ tür. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ olur.

Tanjant Fonksiyonunun Tersi

$f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\tan x$ fonksiyonu bire bir ve örtendir. Tanjant fonksiyonunun ters fonksiyonu arktanjant fonksiyonudur. Tanjant fonksiyonunun tersi **arctan** sembolü ile gösterilir.

$f^{-1}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ f^{-1}(x)=\arctan x$ tir.

$\mathbf{y=\arctan x \Leftrightarrow x=\tan y}$

Örnek

$\arctan(1)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\arctan(1)=x\Leftrightarrow \tan x=1$ dir. $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ nda $x=\frac{\pi}{4}$ için $\tan\frac{\pi}{4}=1$ olduğundan $x=\frac{\pi}{4}$ tür.

Buna göre $\arctan(1)=x=\frac{\pi}{4}$ olur.

Örnek

$\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=x\Leftrightarrow \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ için $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$ olur.

Örnek

$\arctan(-\sqrt{3})$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\arctan(-\sqrt{3})$, tanjantı $-\sqrt{3}$ olan ve $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ nda olan bir açıdır.

$\arctan(-\sqrt{3})=x\Leftrightarrow \tan x=-\sqrt{3}$ olur.

Buna göre $x=-\frac{\pi}{3}$ olduğundan

$x=\arctan(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$ tür.

ETKİNLİK

Aşağıdaki tabloda sol sütunda bulunan ifadelerin her birinin eşitini sağ sütundan bularak örnekteki gibi eşleştiriniz.

$\arcsin(0)$	$\frac{\pi}{6}$
$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$	$0°$
$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{5\pi}{6}$
$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{4}$
$\arctan(-1)$	$\frac{\pi}{3}$
$\arctan(\sqrt{3})$	$-\frac{\pi}{6}$

Örnek

$\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\arccos\frac{1}{2} = x \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ise $x = \frac{\pi}{3}$

$\sin\underbrace{\left(\arccos\frac{1}{2}\right)}_{x} = \sin x = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

Örnek

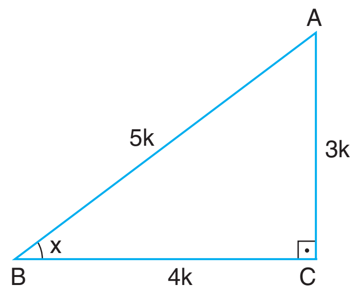
$\arctan\frac{3}{4} = x$ ise $\sin x$ in değerini bulalım.

Çözüm

$\arctan\frac{3}{4} = x \Leftrightarrow \tan x = \frac{3}{4}$ tür.

Bu şarta uygun dik üçgen çizelim.

Çizilen dik üçgene göre $\sin x = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$ olur.

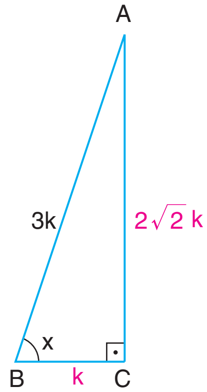


Örnek

$\tan\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\arccos\frac{1}{3} = x \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{3}$ tür. Bu şarta uygun dik üçgen çizelim.



$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$

$(3k)^2 = |AC|^2 + k^2$

$9k^2 = |AC|^2 + k^2$

$|AC|^2 = 9k^2 - k^2$

$|AC|^2 = 8k^2$

$|AC| = 2\sqrt{2}\,k$ br

Buna göre $\tan\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \tan x = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{2\sqrt{2}\,k}{k} = 2\sqrt{2}$ olur.

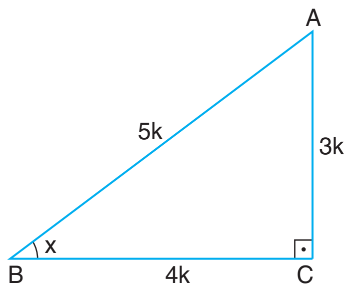
Örnek

$\sin\left(\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\arctan\left(-\frac{3}{4}\right) = x \Leftrightarrow \tan x = -\frac{3}{4}$ olduğundan $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ olur.

Bu şarta uygun dik üçgen yandaki gibidir.



ABC dik üçgenine göre $\sin\left(\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \sin x = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$ tir.

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ olduğundan $\sin x = -\frac{3}{5}$ olur.

UYGULAYALIM 1-6

1. Aşağıdaki ifadelerin değerini bulunuz.

a) $\arctan(-1)$

b) $\arcsin(-1)$

c) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ç) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2. $\arcsin\frac{4}{5} = x$ olduğuna göre $\tan x$ kaçtır?

3. $\cos\left(\arctan\frac{1}{2}\right) = x$ olduğuna göre x kaçtır?

4. $\sin(\arcsin x) = x$ olduğunu gösteriniz.

5. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ olduğunu gösteriniz.

6. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

7. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{2}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

8. $\cos\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right) + \cot\left(\arctan\left(-\frac{5}{12}\right)\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

9. $\tan\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

10. $\arccos\frac{2}{3} = x$ ise $\tan x$ değerini bulunuz.

11. $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$ değerini bulunuz.

1. DEĞERLENDİRME SORULARI

1. 320°nin radyan cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3\pi}{5}$ B) $\frac{10\pi}{9}$ C) $\frac{15\pi}{9}$ D) $\frac{16\pi}{9}$ E) $\frac{25\pi}{9}$

2. Ölçüsü $\frac{9\pi}{5}$ olan açının derece cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 324° B) 326° C) 328° D) 330° E) 345°

3. $s(\widehat{A}) = 90°$ ve $s(\widehat{B}) = \frac{2\pi}{3}$ radyan olduğuna göre $s(\widehat{A}) + s(\widehat{B})$ toplamının derece cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 90° B) 100° C) 210° D) 300° E) 320°

4. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 35°\,25'$ ve $m(\widehat{B}) = 42°\,20'$ olduğuna göre $m(\widehat{C})$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 100° 20′ B) 102° 15′ C) 105° D) 120° E) 125° 15′

5. Ölçüsü 5560° olan bir açının esas ölçüsü kaç radyandır?

A) $\frac{15\pi}{18}$ B) $\frac{7\pi}{9}$ C) $\frac{5\pi}{6}$ D) $\frac{8\pi}{9}$ E) $\frac{25\pi}{9}$

6. Ölçüsü $-1590°$ olan bir açının esas ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 100° B) 120° C) 180° D) 210° E) 270°

7. Tanımlı olduğu aralıkta $\frac{1 + \cot x}{\tan x + 1}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\sec x$ D) $\tan x$ E) $\cot x$

8. $\sin 20° = m$ olduğuna göre cos340°nin m türünden yazılışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) –m B) m C) $\sqrt{1+m^2}$ D) $\sqrt{1-m^2}$ E) 2m

9. Tanımlı olduğu aralıkta $\left(1 - \frac{1}{\sec^2 x}\right) \cdot (1 + \tan^2 x)$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\tan^2 x$ B) 1 C) $\sin^2 x$ D) $\cot^2 x$ E) $\sec x$

10. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ olmak üzere $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = 2$ olduğuna göre $\sin\theta$ kaçtır?

A) $\sqrt{10}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C) $\frac{2\sqrt{10}}{10}$ D) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ E) 10

11. $\dfrac{1}{1-\tan 50°}+\dfrac{1}{1-\cot 50°}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\tan 50°$ B) 1 C) $\cot 50°$ D) $\tan 40°$ E) $\cot 40°$

12. $\arctan\dfrac{1}{2}=x$ ise $\sin x$ kaçtır?

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{5}$

13. $\tan\left(\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{3}{4}$ D) $\dfrac{4}{3}$ E) $\dfrac{5}{3}$

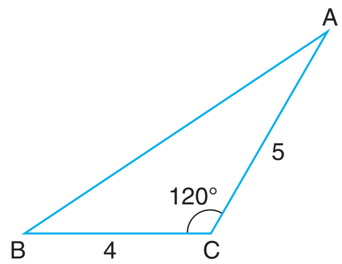
14. $\sin\left(\arccos\dfrac{4}{5}\right)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{3}{5}$ B) $\dfrac{4}{5}$ C) $\dfrac{3}{4}$ D) $\dfrac{2}{3}$ E) 1

15. $\sin\left(\arctan\dfrac{3}{4}\right)+\cos\left(\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

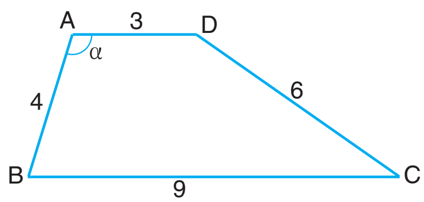
A) $\dfrac{7}{5}$ B) $\dfrac{6}{5}$ C) 1 D) $\dfrac{4}{5}$ E) $\dfrac{3}{5}$

16. Yandaki şekilde ABC üçgen, $m(\widehat{ACB})=120°$, $|BC|=4$ cm, $|AC|=5$ cm olduğuna göre $|AB|$ kaç cm dir?



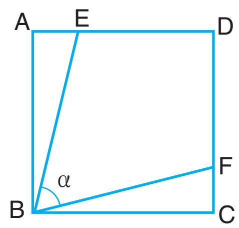
A) $3\sqrt{5}$ B) 7 C) $5\sqrt{2}$
D) $\sqrt{61}$ E) 8

17. Yandaki ABCD yamuğunda, $[AD] \parallel [BC]$, $|AD|=3$ cm, $|AB|=4$ cm, $|BC|=9$ cm, $|CD|=6$cm ve $m(BAD)=\alpha$ ise $\cos\alpha$ kaçtır?



A) $-\dfrac{1}{4}$ B) $-\dfrac{1}{3}$ C) 1
D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{1}{4}$

18. Yandaki ABCD karesinde $|DE|=|DF|=4|AE|$ olduğuna göre $\sin\alpha$ kaçtır?

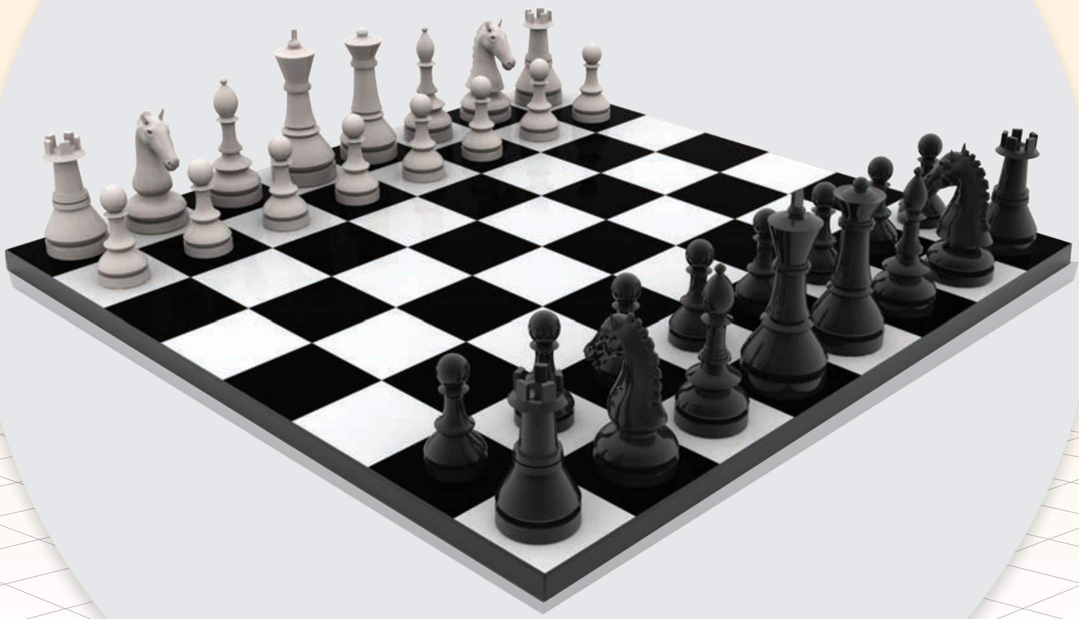


A) $\dfrac{12}{13}$ B) $\dfrac{5}{13}$ C) $\dfrac{5}{12}$
D) 1 E) $\dfrac{2}{3}$

2. ANALİTİK GEOMETRİ

2. ANALİTİK GEOMETRİ

2.1. DOĞRUNUN ANALİTİK İNCELENMESİ



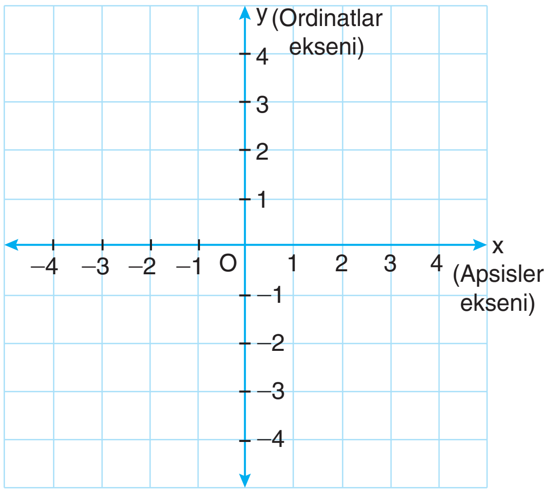
2.1. DOĞRUNUN ANALİTİK İNCELENMESİ

2.1.1. Analitik Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık

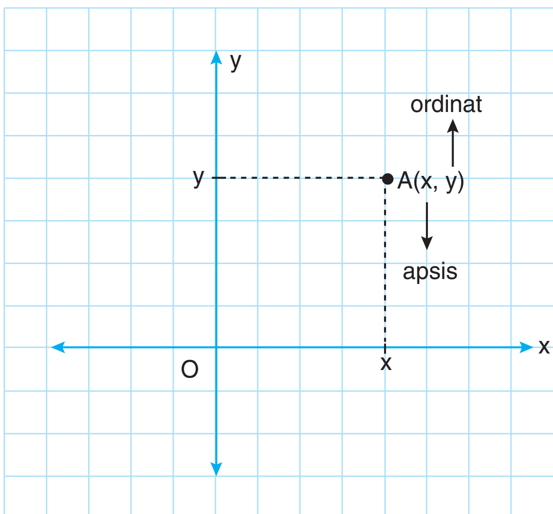
Analitik Düzlem

Başlangıç noktaları aynı olan ve birbirine dik iki sayı doğrusunun oluşturduğu sisteme **dik koordinat sistemi**, üzerinde dik koordinat sistemi tanımlanmış düzleme **analitik düzlem** denir.

Dik doğrulardan yatay olanına **apsisler ekseni,** dikey olanına **ordinatlar ekseni** denir. O(0, 0) noktası koordinat eksenlerinin kesim noktasıdır. Bu noktaya **başlangıç noktası** veya **orijin** denir.



Analitik düzlemde bir A noktası alalım. A noktasından x eksenine indirilen dikmenin ekseni kestiği noktaya karşılık gelen reel sayıya A noktasının **apsisi,** y eksenine çizilen dikmenin ekseni kestiği noktaya karşılık gelen reel sayıya A noktasının **ordinatı** denir. Bu noktalar $A(x, y)$ biçiminde gösterilir. $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dir.



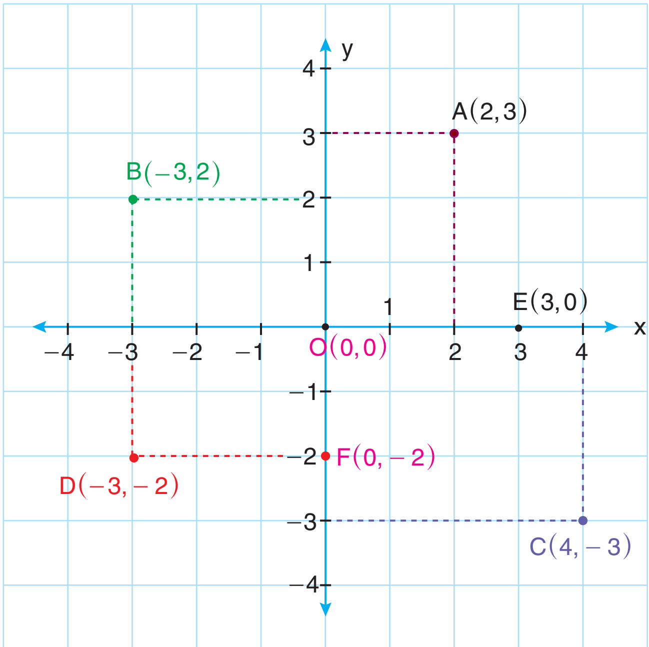
Buna göre her $(x, y) \in \mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$ ye analitik düzlemde bir nokta karşılık gelir.

Örnek

Analitik düzlemde $A(2,3), B(-3,2), C(4,-3), D(-3,-2), O(0,0), E(3,0), F(0,-2)$ noktalarını gösterelim.

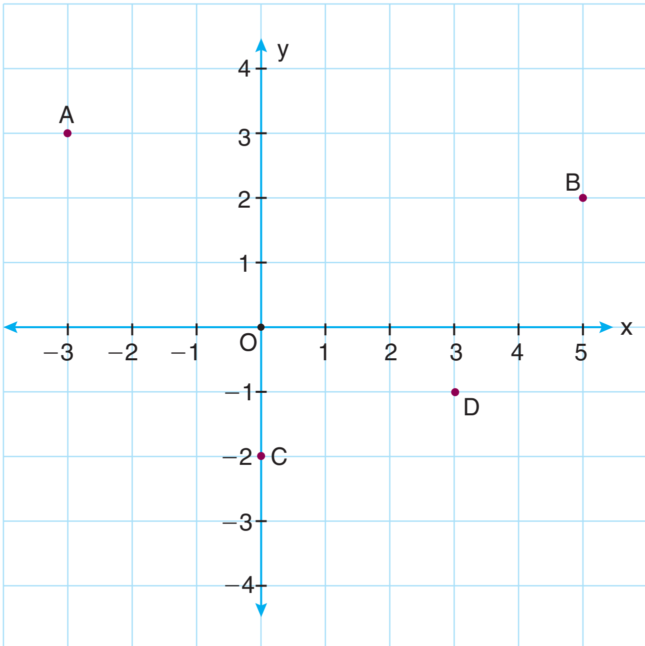
Çözüm

Her bir noktanın apsisini x ekseni üzerinde, ordinatını y ekseni üzerinde bularak bu noktalardan çizilen dikmelerin kesiştikleri noktaları işaretlemeliyiz.



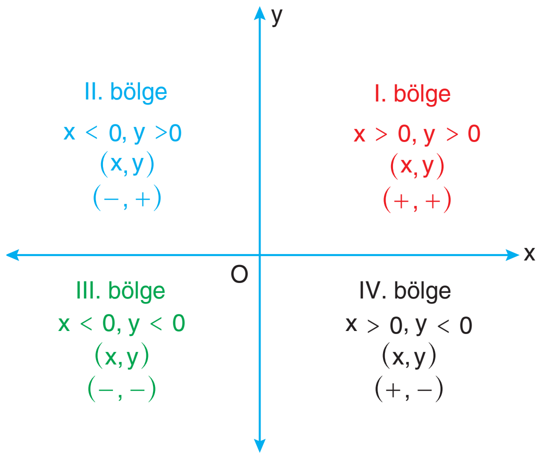
Örnek

Yanda A, B, C ve D noktaları analitik düzlemde gösterilmiştir. Buna göre A, B, C ve D noktalarının apsislerinin toplamını bulalım.



Çözüm

Apsisleri bulmak için bu noktaların x ekseni üzerindeki bileşenlerini almalıyız. Buna göre $A(-3,3)$, $B(5,2)$, $C(0,-2)$ ve $D(3,-1)$ olduğundan bu noktaların apsislerinin toplamı $-3+5+0+3=5$ tir.



Dik koordinat sistemi analitik düzlemi dört bölgeye ayırır.

I. bölge: $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

II. bölge: $\{(x, y) \mid x < 0, y > 0, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

III. bölge: $\{(x, y) \mid x < 0, y < 0, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

IV. bölge: $\{(x, y) \mid x > 0, y < 0, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

Örnek

$A(a-1, a-5)$ noktası analitik düzlemin dördüncü bölgesinde olduğuna göre a nın alabileceği tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm

$A(x, y)$ noktası analitik düzlemin dördüncü bölgesinde olduğundan $x > 0$ ve $y < 0$ olmalıdır. Buna göre

$a-1 > 0$ ve $a-5 < 0$ ise $a > 1$ ve $a < 5$ tir.

Bu durumda $1 < a < 5$ olduğundan a nın alabileceği tam sayı değerleri 2, 3 ve 4 tür.

Örnek

$A=(2, m-3)$ ve $B(m+2,-6)$ noktaları analitik düzlemde aynı bölgede olduklarına göre m nin değer aralığını bulalım.

Çözüm

$$A(2, \underset{+}{\underset{\downarrow}{}}\!\!\! m-3) \qquad B(m+2, -6)$$

A(2, m − 3): 2 → +, m − 3 → −

B(m + 2, − 6): m + 2 → +, − 6 → −

2 pozitif olduğundan $m+2$ de pozitiftir. -6 negatif olduğundan $m-3$ de negatif olur. Bu durumda

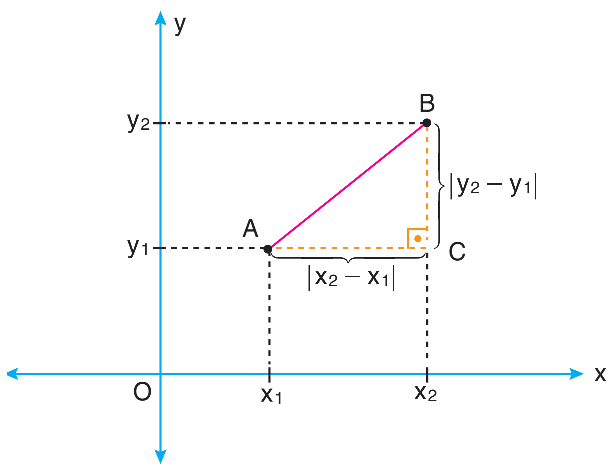
$m+2>0$ ve $m-3<0$ ise

$m>-2$ ve $m<3$ olup $-2<m<3$ olur.

$m \in (-2, 3)$ dır.

Analitik Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarını alalım.



BCA dik üçgeninde $|AC|=|x_2-x_1|$ ve $|BC|=|y_2-y_1|$ ise A ile B noktaları arasındaki uzaklık $|AB|$ olmak üzere

$$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2 \qquad \left(|x_2-x_1|^2=(x_2-x_1)^2 \text{ ve } |y_2-y_1|^2=(y_2-y_1)^2\right)$$

$$|AB|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \text{ dir.}$$

Örnek

Analitik düzlemde $A(2,5)$ ve $B(-3,1)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulalım.

Çözüm

$A(\underset{x_1}{2},\underset{y_1}{5})$, $B(\underset{x_2}{-3},\underset{y_2}{1})$

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-3-2)^2+(1-5)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} \text{ br olur.}$$

ETKİNLİK

Analitik düzlemde; $A(1,2), B(-1,-3), C(2,1), D(-3,-2), E(4,0)$ noktaları veriliyor. Buna göre 1. satırdaki işlemi tamamlayıp benzer şekilde diğer satırları doldurunuz.

$\lvert AB\rvert =$	$\sqrt{(-1-1)^2+(-3-2)^2} =$
$\lvert AC\rvert =$	
$\lvert DE\rvert =$	
$\lvert BE\rvert =$	
$\lvert EC\rvert =$	

Örnek

$M(-2,3)$ ve $N(2,a)$ olmak üzere $|MN| = 5$ br ise a nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

$|MN| = 5$ br ise $\sqrt{(2-(-2))^2+(a-3)^2} = 5$

$$\sqrt{16+(a-3)^2} = 5$$

$$16+(a-3)^2 = 25$$

$$(a-3)^2 = 9$$

$$|a-3| = 3 \text{ ise}$$

$$a-3 = 3 \text{ veya } a-3 = -3$$

$$a = 6 \text{ veya } a = 0 \text{ olur.}$$

Örnek

Analitik düzlemde $C(2, m)$ noktasının $D(-2, 4)$ noktasına olan uzaklığı ile $E(1, 3)$ noktasına olan uzaklığı eşit olduğuna göre m değerini bulalım.

Çözüm

$C(2, m), D(-2, 4), E(1, 3)$
$x_1 \; y_1 \quad x_2 \; y_2 \quad x_3 \; y_3$

$$|CD| = |CE| \Rightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(-2-2)^2 + (4-m)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (3-m)^2}$$

$$\sqrt{16 + 16 - 8m + m^2} = \sqrt{1 + 9 - 6m + m^2}$$

$$32 - 8m + \cancel{m^2} = 10 - 6m + \cancel{m^2}$$

$$-8m + 6m = 10 - 32$$

$$-2m = -22$$

$$m = \frac{-22}{-2} = 11 \text{ olur.}$$

Örnek

$A(1, -2)$ ve $B(-2, 3)$ noktalarına eşit uzaklıkta olan ve x ekseni üzerinde bulunan C noktasının apsisini bulalım.

Çözüm

C noktası, x ekseni üzerinde olduğundan bu noktayı $C(a, 0)$ olarak alalım.

$$|AC| = |BC| \text{ ise } \sqrt{(a-1)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{(a-(-2))^2 + (0-3)^2}$$

$$\sqrt{(a-1)^2 + 4} = \sqrt{(a+2)^2 + 9}$$

$$(a-1)^2 + 4 = (a+2)^2 + 9$$

$$a^2 - 2a + 1 + 4 = a^2 + 4a + 4 + 9$$

$$-2a + 5 = 4a + 13$$

$$-6a = 8$$

$$a = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3} \text{ olur.}$$

O hâlde C noktasının apsisi $-\frac{4}{3}$ tür.

UYGULAYALIM 2-1

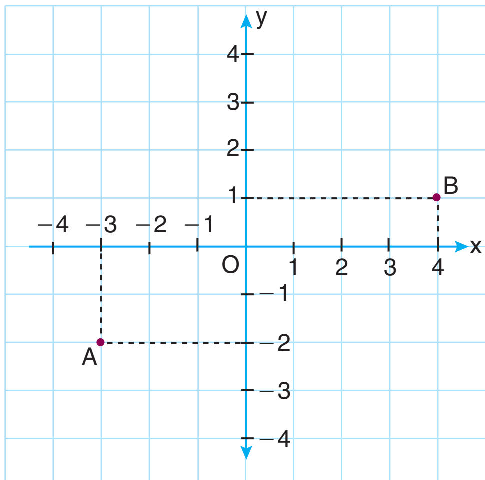
1. Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(1,3), B(-2,1), C(2,1), D(-2,-2)$ olan ABCD dörtgeninin kenar uzunluklarını bulunuz.

2. $A(-3,1)$ ve $B(m,1)$ olmak üzere A ile B noktaları arasındaki uzaklık 5 br dir. Buna göre m nin alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

3. $P(-2,-3)$ ve $R(1,-2)$ noktalarına eşit uzaklıkta bulunan y ekseni üzerindeki bir A noktasının ordinatını bulunuz.

4. $M(-2,1)$ ve $N(2,-3)$ noktalarına eşit uzaklıkta bulunan ve x ekseni üzerinde bulunan bir B noktasının apsisini bulunuz.

5. Şekilde verilen A ve B noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

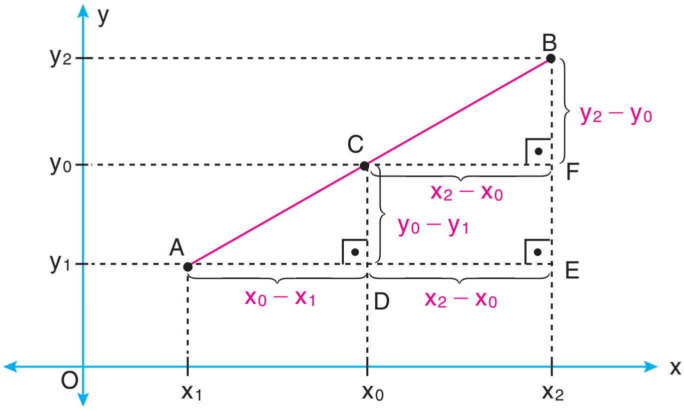


6. Aynı doğru üzerinde A(4, a), B(10, 12) ve C(b, 6) noktaları veriliyor. $[AC]$ nın orta noktası B noktası olduğuna göre $a+b$ toplamını bulunuz.

2.1.2. Bir Doğru Parçasını Belli Bir Oranda Bölen Noktaların Koordinatları

Şekilde $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ noktaları ve $[AB]$ nı k oranında içten bölen $C(x_0, y_0)$ noktası için

$\frac{|AC|}{|CB|} = k,\ k \in \mathbb{R}^+$ verilsin.



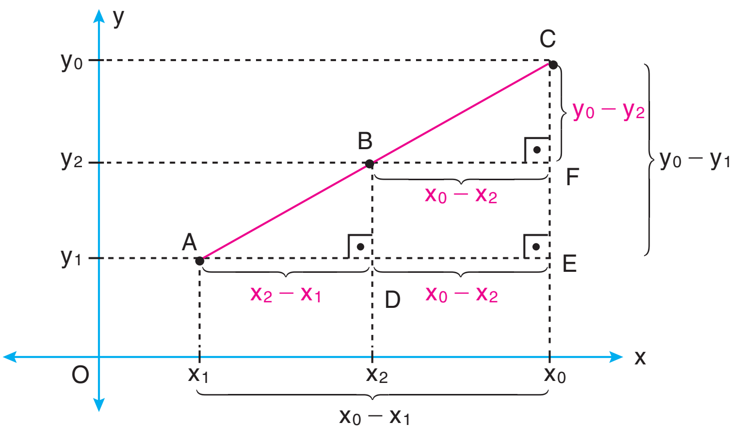
$\widehat{ADC} \sim \widehat{CFB}$ dir. (Açı açı benzerlik teoremi)

$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|CF|}$ yazılabilir.

$k = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0}$ ve $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|CD|}{|BF|}$ ise $k = \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_0}$ dır.

Bu eşitliklerde x_0 ve y_0 yalnız bırakılırsa $\mathbf{x_0 = \frac{x_1 + k \cdot x_2}{1 + k}}$ ve $\mathbf{y_0 = \frac{y_1 + k \cdot y_2}{1 + k}}$ olur.

Şekilde $[AB]$ nı k oranında dıştan bölen $C(x_0, y_0)$ noktası için, $\frac{|AC|}{|BC|} = k,\ k \in \mathbb{R}^+$ verilsin.



$\widehat{ACE} \sim \widehat{BCF}$ dir. (Temel orantı teoremi)

$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|BF|}$ ise $k = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2}$ ve $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|CE|}{|CF|}$ ise $k = \frac{y_0 - y_1}{y_0 - y_2}$ dir.

Bu eşitliklerde x_0 ve y_0 yalnız bırakılırsa $\mathbf{x_0 = \frac{x_1 - k \cdot x_2}{1 - k}}$ ve $\mathbf{y_0 = \frac{y_1 - k \cdot y_2}{1 - k}}$ elde edilir.

Örnek

$A(6,2)$ ve $B(12,-4)$ noktalarını birleştiren doğru parçası $\dfrac{|AC|}{|CB|}=2$ olacak şekilde bir C noktası ile içten bölünüyor. Buna göre C noktasını bulalım.

Çözüm

1. yol

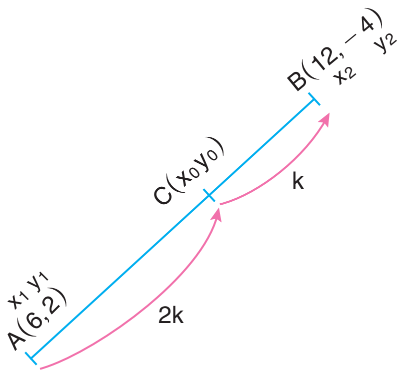
Aradığımız nokta $C(x_0, y_0)$ olsun.

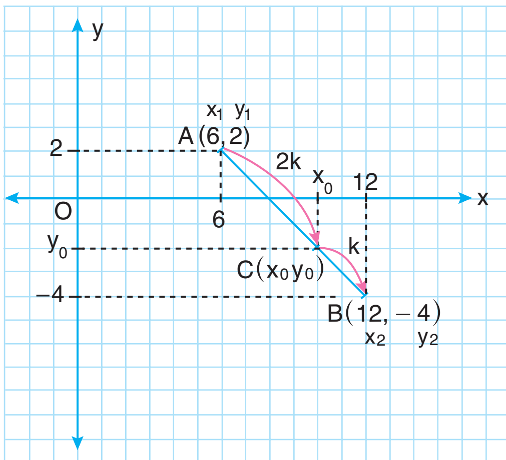
$A(\overset{x_1}{6},\overset{y_1}{2}),\ B(\overset{x_2}{12},\overset{y_2}{-4})$ ve $k=2$ ise

$$x_0=\frac{x_1+k\cdot x_2}{1+k}=\frac{6+2\cdot 12}{1+2}=\frac{30}{3}=10 \quad \text{ve} \quad y_0=\frac{y_1+k\cdot y_2}{1+k}=\frac{2+2\cdot(-4)}{1+2}=\frac{-6}{3}=-2$$

$C(x_0, y_0)=C(10,-2)$ dir.

2. yol





$\dfrac{|AC|}{|CB|}=\dfrac{2k}{k}$ eşitliğini önce apsisler için, sonra ordinatlar için ayrı ayrı yazarak elde edilen denklemlerde x_0 ve y_0 değerlerini bulalım.

$$\frac{x_0-6}{12-x_0}=\frac{2\cancel{k}}{\cancel{k}} \text{ ise } x_0-6=-2x_0+24$$
$$3x_0=30$$
$$x_0=10$$

$$\frac{y_0-2}{-4-y_0}=\frac{2\cancel{k}}{\cancel{k}} \text{ ise } y_0-2=-8-2y_0$$
$$3y_0=-6$$
$$y_0=-2 \text{ dir.}$$

$C(x_0, y_0)=C(10,-2)$ olur.

Örnek

M$(-4,8)$ ve N$(8,2)$ noktaları veriliyor. $[MN]$ nı içten bölen bir P noktası alınıyor. $3|MP| = 2|PN|$ olduğuna göre P noktasının apsisini bulalım.

Çözüm

1. yol

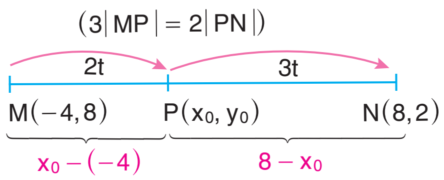
$M(-4,8)$, $N(8,2)$ ve $P(x_0, y_0)$ noktaları veriliyor.

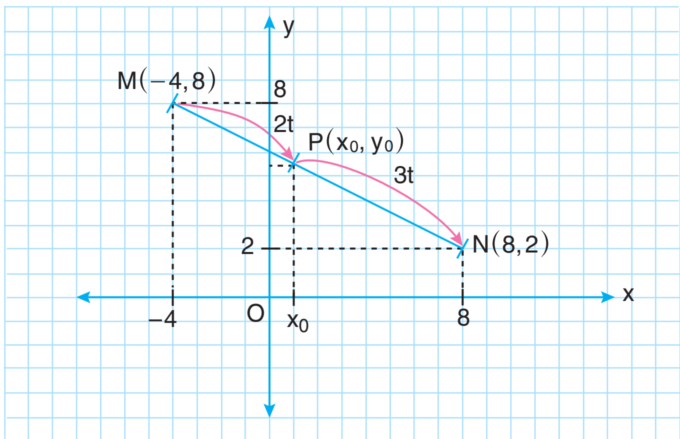
$3|MP| = 2|PN|$ ise $\dfrac{|MP|}{|PN|} = \dfrac{2}{3} = k$ dir. x_0 değerini bulmalıyız. Buna göre

$$x_0 = \frac{x_1 + k\cdot x_2}{1+k} \text{ ise } x_0 = \frac{-4 + \frac{2}{3}\cdot 8}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} \text{ ise } x_0 = \frac{4}{5} \text{ olur.}$$

2. yol

$$3|MP| = 2|PN| \Rightarrow \frac{|MP|}{|PN|} = \frac{2}{3} = \frac{2t}{3t}$$





$$\frac{x_0 - (-4)}{8 - x_0} = \frac{2\cancel{t}}{3\cancel{t}} \text{ ise}$$

$$3x_0 + 12 = 16 - 2x_0$$

$$5x_0 = 4$$

$$x_0 = \frac{4}{5} \text{ elde edilir.}$$

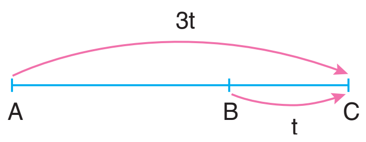
P noktasının apsisi $x_0 = \dfrac{4}{5}$ tir.

Örnek

A(2, 4) ve B(6, 0) noktaları veriliyor. [AB] nı B tarafından dıştan bölen, A ve B noktaları ile doğrudaş bir C noktası alınıyor. |AC| = 3|BC| olduğuna göre C noktasının ordinatını bulalım.

Çözüm

1. yol



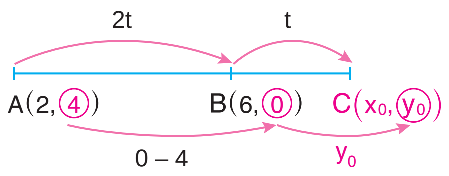
|AC| = 3|BC| ise

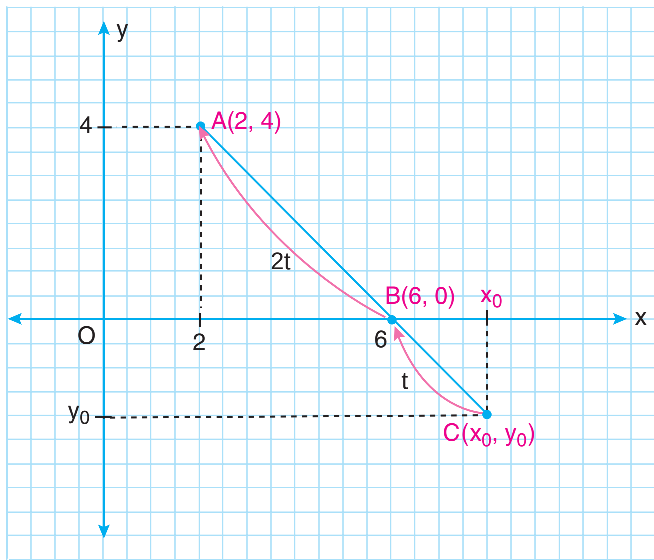
$$\frac{|AC|}{|BC|} = 3 = k \text{ dir.}$$

$A(2,4), B(6,0), C(x_0, y_0)$ ise y_0 değerini bulmalıyız.
$\quad x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$

$$y_0 = \frac{y_1 - k \cdot y_2}{1-k} = \frac{4 - 3 \cdot 0}{1-3} = \frac{4}{-2} = -2 \text{ olur.}$$

2. yol





(|AC| = 3|BC|)

$$\frac{4-0}{0-y_0} = \frac{2t}{t} \text{ ise } y_0 = -2 \text{ bulunur.}$$

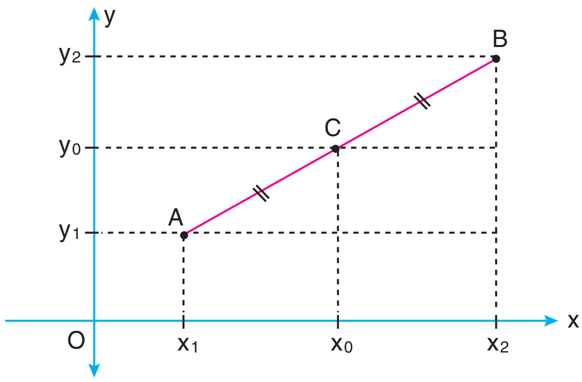
Buna göre C noktasının ordinatı −2 olur.

Bir Doğru Parçasının Orta Noktasının Koordinatları

Aşağıdaki şekilde, uç noktaları $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olan $[AB]$ nın orta noktası $C(x_0, y_0)$ olmak üzere

$$\mathbf{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}} \text{ ve } \mathbf{y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}} \text{ dir.}$$

$k = \dfrac{|AC|}{|BC|}$ ise $|AC| = |BC|$ olduğundan $k = 1$ olur.



C noktası $[AB]$ nı içten böldüğünden

$$x_0 = \frac{x_1 + k \cdot x_2}{1 + k} = \frac{x_1 + 1 \cdot x_2}{1 + 1} = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ve } y_0 = \frac{y_1 + k \cdot y_2}{1 + k} = \frac{y_1 + 1 \cdot y_2}{1 + 1} = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ olur.}$$

Örnek

$A(1, 4), B(9, 6)$ olmak üzere $[AB]$ nı içten bölen bir $C(x_0, y_0)$ noktası veriliyor. $|AC| = |CB|$ olduğuna göre C noktasının koordinatlarını bulalım.

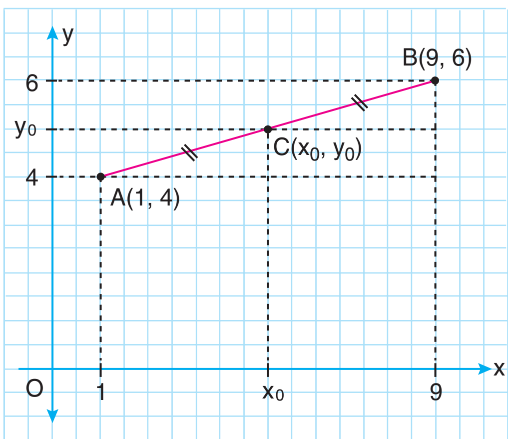
Çözüm

$|AC| = |CB|$ ise C noktası $[AB]$ nın orta noktasıdır.

Bu durumda

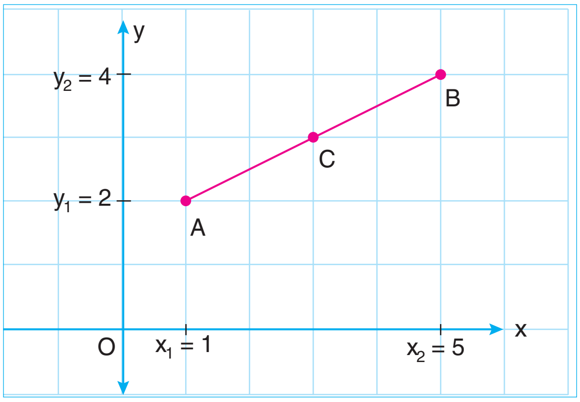
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 9}{2} = 5 \text{ ve } y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

olur. Buna göre aradığımız nokta $C(5, 5)$ noktasıdır.



ETKİNLİK

• Aşağıdaki şekilde C noktasının koordinatlarını yazınız.



• C noktasının koordinatlarını A ve B noktalarının koordinatlarından yararlanarak hesaplayınız.

• C, $[AB]$ nın orta noktası olduğuna göre orta noktanın koordinatlarını veren bağıntıyı oluşturunuz.

• Bu bağıntıdan yararlanarak uç noktaları tabloda verilen doğru parçalarının orta noktalarının koordinatlarını bulunuz.

$D(-2,4),\ B(2,10)$	$x_0 = \frac{-2+2}{2} = 0,\ y_0 =$
$E(1,5), D(3,-1)$	
$F(0,0), C(-4,2)$	
$G(-3,5), H(1,3)$	
$O(0,0), I(3,3)$	
$J(-1,4), K(4,-2)$	
$P(-2,-2), R(4,4)$	
$T(0,-2), S(-2,0)$	

Örnek

$A(1, m)$ ve $B(n, 6)$ noktaları veriliyor. $[AB]$ nın orta noktası $C(5, -2)$ olduğuna göre $m + n$ toplamını bulalım.

Çözüm

$A(1, m),\ B(n, 6),\ C(5, -2)$

$x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ ise $5 = \dfrac{1 + n}{2}$ ise $n = 9$ dur.

$y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ ise $-2 = \dfrac{m + 6}{2}$ ise $m = -4 - 6$

$m = -10$ dur.

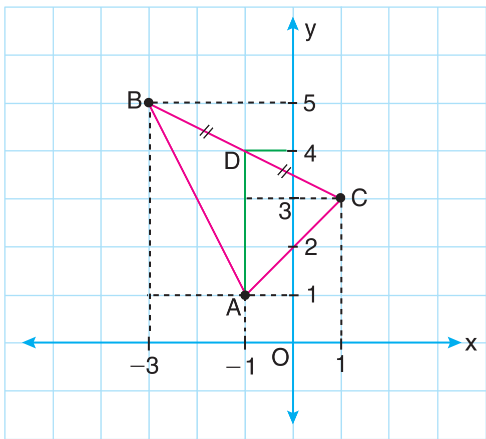
Buna göre $m + n = 9 + (-10) = -1$ olur.

Örnek

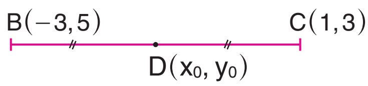
Köşelerinin koordinatları $A(-1, 1), B(-3, 5)$ ve $C(1, 3)$ noktaları olan ABC üçgeninin BC kenarına ait kenarortayının uzunluğunu bulalım.

Çözüm

Şekildeki ABC üçgeninin BC kenarına ait kenarortayı $[AD]$ dır.



Önce $[BC]$ nın orta noktası olan $D(x_0, y_0)$ noktasını bulalım.



$x_0 = \dfrac{-3 + 1}{2} = -1$

$y_0 = \dfrac{5 + 3}{2} = 4$

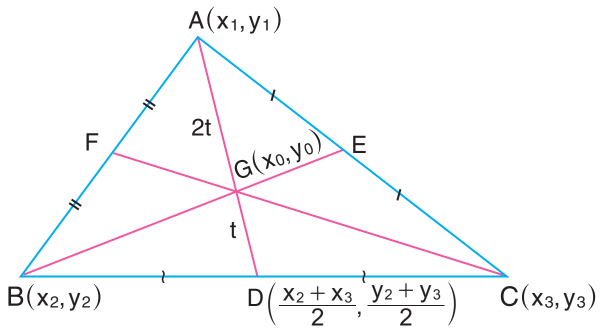
$D(x_0, y_0) = D(-1, 4)$ olur. Buna göre,

$V_a = |AD| = \sqrt{(-1 - (-1))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$ br bulunur.

Köşelerinin koordinatları $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ noktaları olan üçgenin ağırlık merkezi $G(x_0, y_0)$ ise G noktasının koordinatları,

$\mathbf{x_0 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}}$ ve $\mathbf{y_0 = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}}$ bağıntıları ile hesaplanır.

Bir üçgenin ağırlık merkezi, kenarortayların kesim noktasıdır. Ayrıca G noktası ağırlık merkezi ise $\dfrac{|AG|}{|GD|} = 2$ dir.



Bu durumda $G(x_0, y_0)$ noktası $[AD]$ nı $k = 2$ oranında içten böler. Buna göre

$$x_0 = \frac{x_1 + k\cdot\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)}{1 + k} = \frac{x_1 + 2\cdot\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)}{1 + 2}$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y_0 = \frac{y_1 + k\cdot\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right)}{1 + k} = \frac{y_1 + 2\cdot\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right)}{1 + 2}$$

$y_0 = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ olur.

Örnek

Bir ABC üçgeninin köşeleri $A(2,3), B(-1,2)$ ve $C(-4,4)$ noktaları olduğuna göre ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulalım.

Çözüm

$A(2,3), B(-1,2), C(-4,4)$ ve $G(x_0, y_0)$ ağırlık merkezi ise

$x_0 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \dfrac{2 + (-1) + (-4)}{3} = -1$ ve $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \dfrac{3 + 2 + 4}{3} = 3$ olur.

Buna göre $G(x_0, y_0) = G(-1, 3)$ olur.

UYGULAYALIM 2-2

1. $A(4,-2)$ ve $B(-2,4)$ noktaları veriliyor. $[AB]$ nı içten bölen bir C noktası için $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{1}{2}$ olduğuna göre C noktasının koordinatlarını bulunuz.

2. $M(-1,3)$ ve $N(7,-5)$ noktaları veriliyor. $[MN]$ nın dışında M ve N ile doğrudaş bir P noktası alınıyor. $3.|PM|=|PN|$ olduğuna göre P noktasının koordinatlarını bulunuz.

3. $A(1,-3), B(6,2)$ ve $B \in [A,C]$ olmak üzere $\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{5}{3}$ tür. Buna göre C noktasının koordinatlarını bulunuz.

4. Aşağıda, uç noktaları verilen doğru parçalarının orta noktalarını bulunuz.

$A(-1,10), B(3,2)$	
$C(2,-3), D(-2,5)$	
$E(0,0), F(-4,2)$	
$G(-1,1), H(5,-3)$	

5. $A(-5,3)$ ve $B(a+3, b-2)$ noktaları veriliyor. $[AB]$ nın orta noktası $C(-1,-3)$ olduğuna göre $(a+b)$ toplamını bulunuz.

6. Köşelerinin koordinatları $A(-2,2), B(-1,5)$ ve $C(-6,4)$ olan ABC üçgeninin $[AC]$ kenarına ait kenarortayının uzunluğunu bulunuz.

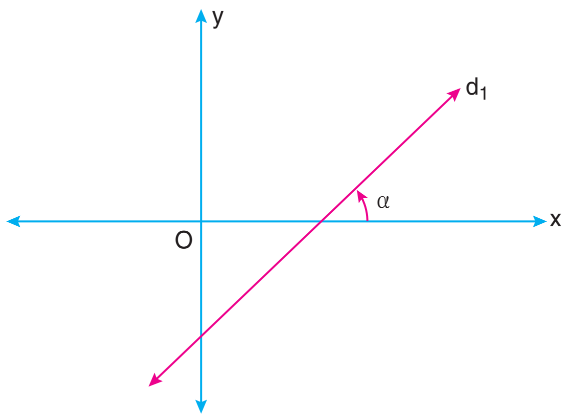
7. Aşağıda, köşelerinin koordinatları verilen üçgenlerin ağırlık merkezlerinin koordinatlarını bulunuz.

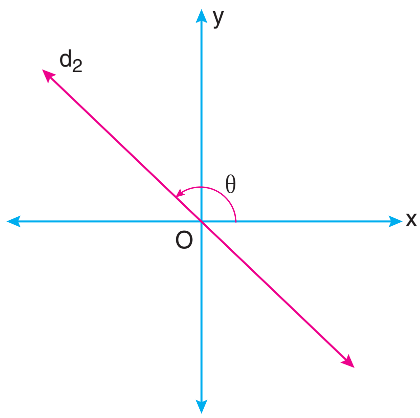
$A(1,5), B(-1,2), C(6,-1)$	
$K(0,0), L(-2,-2), M(2,4)$	
$P(3,3), R(-3,-3), S(3,-3)$	

2.1.3. Analitik Düzlemde Doğrular

Bir Doğrunun Eğim Açısı ve Eğimi

Bir doğrunun x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açıya doğrunun **eğim açısı,** bu açının tanjant değerine **doğrunun eğimi** denir. d_1 doğrusunun x ekseni ile yaptığı açı α, d_2 doğrusunun x ekseni ile yaptığı açı θ olmak üzere, $m_1 = \tan\alpha$, $m_2 = \tan\theta$ dır. Eğim açısı $[0^0, 180^0)$ nda bulunur.





d_1 doğrusunun eğim açısı: α

d_1 doğrusunun eğimi: $m_1 = \tan\alpha$

d_2 doğrusunun eğim açısı: θ

d_2 doğrusunun eğimi: $m_2 = \tan\theta$

Örnek

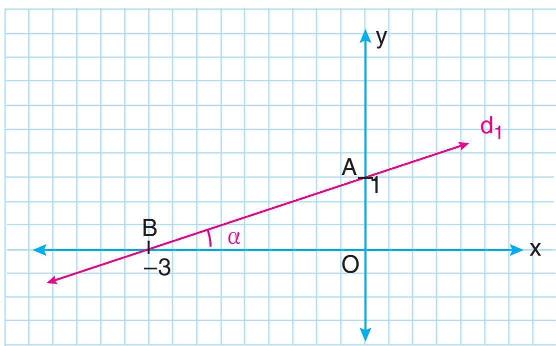
Aşağıda eğim açıları (α) veya grafiği verilen doğruların eğimleri (m) hesaplanmıştır. İnceleyiniz.

$\alpha = 45°$ ise $m = \tan\alpha = \tan 45° = 1$ dir.

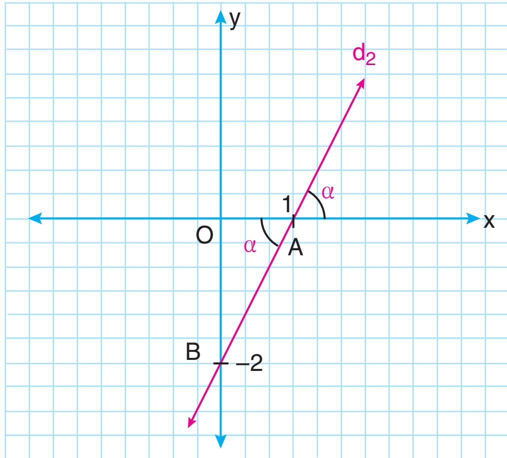
$\alpha = 30°$ ise $m = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ tür.

$\alpha = 150°$ ise $m = \tan 150° = \tan(180° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ tür.

$m = \tan\alpha = \frac{|AO|}{|BO|} = \frac{1}{3}$ tür.



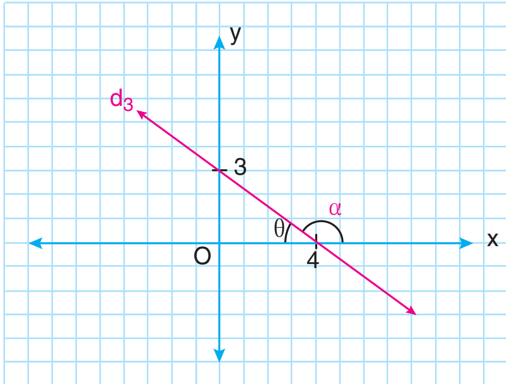
$m = \tan\alpha = \dfrac{|BO|}{|AO|} = \dfrac{2}{1} = 2$ dir.



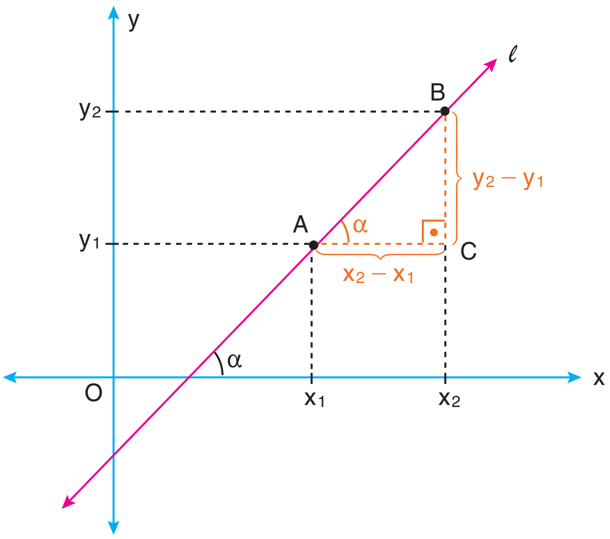
$m = \tan\alpha$

$= -\tan\theta$

$= -\dfrac{3}{4}$ tür.



A(x_1, y_1) ve B(x_2, y_2) noktalarından geçen ℓ doğrusunun eğimi



(α açısı ile BAC açısı yöndeş olduğundan $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ dır.)

$\tan\alpha = \dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dir. ℓ doğrusunun eğim açısı α ve $[AC]$, x eksenine paralel olduğundan $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ olur.

ℓ doğrusunun eğimi m olmak üzere **m = tan**α **=** $\mathbf{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ bulunur.

Örnek

Analitik düzlemde $A(2,-4)$ ve $B(-2,1)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini bulalım.

Çözüm

$A(2,-4), B(-2,1)$ ise $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-(-4)}{-2-2}$

$$m=\frac{5}{-4}=-\frac{5}{4} \text{ olur.}$$

Örnek

Analitik düzlemde $M(-2,0)$ ve $N(2,t)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi $-\frac{1}{2}$ olduğuna göre t nin değerini bulalım.

Çözüm

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{t-0}{2-(-2)}$$

$$-\frac{1}{2}=\frac{t}{4}$$

$$2t=-4$$

$$t=-\frac{4}{2}=-2 \text{ olur.}$$

Örnek

Analitik düzlemde $A(-1,4)$ ve $B(2,a)$ noktalarından geçen doğrunun eğim açısı 135° olduğuna göre a nın kaç olduğunu bulalım.

Çözüm

$A(-1,4)$ ve $B(2,a)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi,

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{a-4}{2-(-1)}=\frac{a-4}{3} \text{ tür.}$$

Doğrunun eğim açısı 135° ise $m=\tan 135°=-1$ olur.

Buna göre

$$m=\frac{a-4}{3}$$

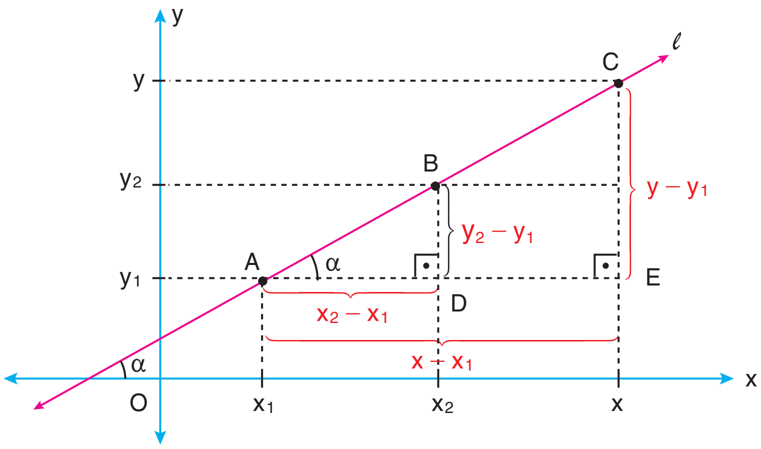
$$-1=\frac{a-4}{3}$$

$a-4=-3$ ise $a=1$ olur.

$\tan 135°=\tan(180°-45°)=\underbrace{-\tan 45°}_{-1}=-1$ olduğunu hatırlayınız.

İki Noktası veya Eğimi ile Bir Noktası Verilen Doğrunun Denklemi

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulalım.



ℓ doğrusunun üzerinde $C(x, y)$ noktasını alalım.

$\widehat{ADB} \sim \widehat{AEC}$ dir. (Temel orantı teoremi)

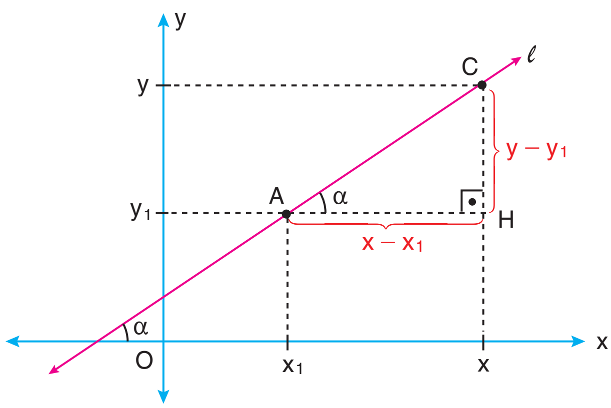
ADB ve AEC dik üçgenlerinde $\dfrac{|BD|}{|AD|} = \dfrac{|CE|}{|AE|} \Rightarrow \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ yazabiliriz.

Buradan $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ise $\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$ dir.

Yani $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi,

$\boldsymbol{\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}}$ dir.

$A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemini bulalım.



Yukarıdaki şekilde ℓ doğrusu üzerinde bir $C(x, y)$ noktası alınırsa

AHC dik üçgeninde $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ olur. Buradan $\mathbf{y - y_1 = m \cdot (x - x_1)}$ dir.

Örnek

Analitik düzlemde $A(1,4)$ ve $B(-1,2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulalım.

Çözüm

$A(\underset{x_1}{1},\underset{y_1}{4}),\ B(\underset{x_2}{-1},\underset{y_2}{2})$ ise iki noktası bilinen doğrunun denkleminden

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2} \text{ ise } \frac{x-1}{1-(-1)}=\frac{y-4}{4-2}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{2}$$

$$x-1=y-4$$

$$x-y+3=0 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Analitik düzlemde $A(-4,1)$ noktasından geçen ve eğimi 2 olan doğrunun denklemini bulalım.

Çözüm

$A(-4,1)$ ve $m=2$ ise

bir noktası ve eğimi bilinen doğrunun denkleminden

$$y-y_1=m\cdot(x-x_1)$$

$$y-1=2\cdot(x-(-4))$$

$$y-1=2x+8$$

$-2x+y-9=0$ ise $y=2x+9$ dur.

!

$y=mx+n$ doğrusunun eğimi m dir. Eğer doğrunun denklemi, $ax+by+c=0$ şeklinde ise y yalnız bırakılarak

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ durumuna getirilir.

Buna göre doğrunun eğimi $m=-\frac{a}{b}$ olur.

Örnek

Aşağıda denklemleri verilen doğruların eğimlerini bulalım.

a) $y = 3x + 2$ **b)** $2x + 3y - 5 = 0$

Çözüm

a) $y = ③x + 2$ doğrusunun eğimi $m = 3$ tür.

b) $2x + 3y - 5 = 0$ ise $a = 2$ ve $b = 3$ tür.

Bu durumda $2x + 3y - 5 = 0$ doğrusunun eğimi $m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{3}$ olur.

Örnek

$O(0,0)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemini bulalım.

Çözüm

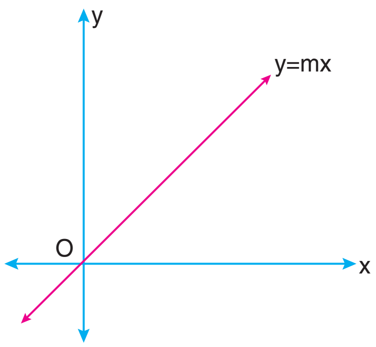
$O(0,0)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi,

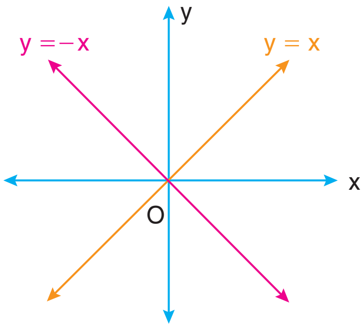
$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$
$$y - 0 = m \cdot (x - 0)$$
$$y = mx \text{ olur.}$$

SONUÇ

Orijinden geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi **y = mx** tir.

Özel olarak $y = x$ doğrusuna birinci açıortay doğrusu, $y = -x$ doğrusuna ikinci açıortay doğrusu denir.





Örnek

Orijinden geçen ve eğimi 1 olan doğrunun denklemini bulalım.

Çözüm

$O(0,0)$ ve $m = 1 \Rightarrow y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$$

$$y = x \text{ olur.}$$

Örnek

$A(2,-1)$ noktasından geçen ve eğim açısı 45° olan doğrunun denklemini bulalım.

Çözüm

$\alpha = 45°$ ise $m = \tan\alpha = \tan 45° = 1$ dir. $A(2,-1)$ ve $m = 1$ ise doğrunun denklemi,

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

$y - (-1) = 1 \cdot (x - 2)$ ise $y + 1 = x - 2$

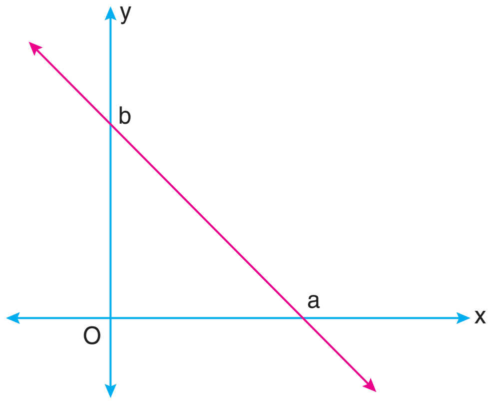
$$-x + y + 3 = 0 \text{ olur.}$$

ETKİNLİK

Aşağıdaki tabloda 1. satırdaki işlemi tamamlayarak iki noktası ya da eğimi ile bir noktası verilen diğer doğruların denklemlerini bulunuz.

$A(-1,0), B(3,2)$	$\frac{y-0}{0-2} = \frac{x-(-1)}{-1-3}$ ise
$C(2,-4), D(-2,3)$	
$E(-1,2), m = \frac{1}{2}$	
$F(2,-3), m = -1$	

Eksenleri Kestiği Noktaları Bilinen Doğrunun Denklemi



$a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olmak üzere

$A(a,0)$ ve $B(0,b)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi,

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$$

$$\frac{x-a}{a-0}=\frac{y-0}{0-b} \Rightarrow \frac{x-a}{a}=\frac{y}{-b} \Rightarrow \frac{x}{a}-\frac{a}{a}=-\frac{y}{b} \Rightarrow \frac{x}{a}-1=-\frac{y}{b} \Rightarrow \mathbf{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \text{ dir.}$$

Örnek

$A(3,0)$ ve $B(0,-3)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulalım.

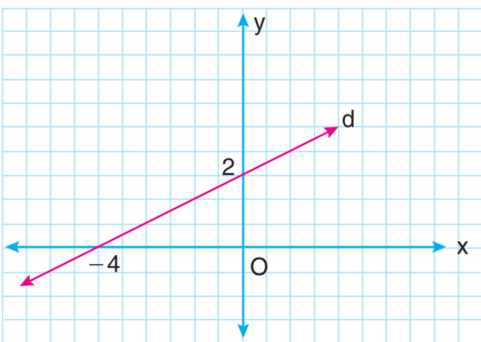
Çözüm

$A(3,0), B(0,-3)$ noktaları $(3,0)$ noktasında x eksenini, $(0,-3)$ noktasında y eksenini kesmektedir.

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ise $\frac{x}{3}+\frac{y}{-3}=1$ ise $x-y=3$ ise $x-y-3=0$ olur.

Örnek

Analitik düzlemde verilen yandaki d doğrusunun denklemini bulalım.



Çözüm

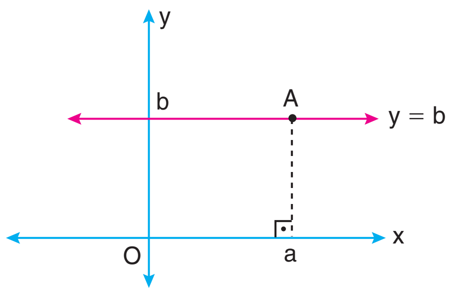
d doğrusu, eksenleri $(-4,0)$ ve $(0,2)$ noktalarında kesmektedir. Buna göre d doğrusunun denklemi,

$\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1$ ise $\frac{x-2y}{-4}=1$ ise $x-2y=-4$ ise

$x-2y+4=0$ olur.

Eksenlere Paralel Doğruların Denklemleri

x eksenine paralel bir doğrunun eğim açısı “0” olduğundan eğimi de “0”dır.



$y = b$ doğrusu üzerinde bir $A(a, b)$ noktası alalım.

Bu durumda x eksenine paralel doğrunun denklemi,

$y - y_1 = m\cdot(x - x_1)$ ise $y - b = 0\cdot(x - a)$ ise $y - b = 0$ ise $\mathbf{y = b}$ dir.

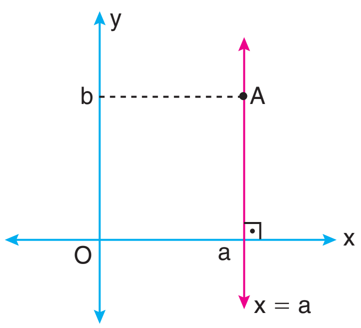
y eksenine paralel doğruların eğim açısı 90° olduğundan eğim, $m = \tan 90°$ dir (tanımsız).

$x = a$ doğrusu üzerinde bir $A(a, b)$ noktası alalım.

Buna göre y eksenine paralel doğrunun denklemi,

$y - y_1 = m\cdot(x - x_1)$ ise $y - b = m\cdot(x - a)$ ise $m = \dfrac{y - b}{x - a}$ dır.

Eğimin tanımsız olması için $x - a = 0$ olmalıdır. Buna göre $x - a = 0$ ise $\mathbf{x = a}$ dır.

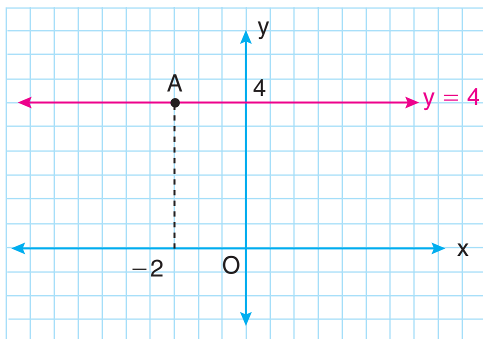


Örnek

$A(-2, 4)$ noktasından geçen ve x ekseni ile ortak noktası olmayan doğrunun denklemini bulalım.

Çözüm

Doğrunun x ekseni ile ortak noktası olmadığından x eksenine paralel olur. Bu durumda doğrunun denklemi $y = 4$ tür.



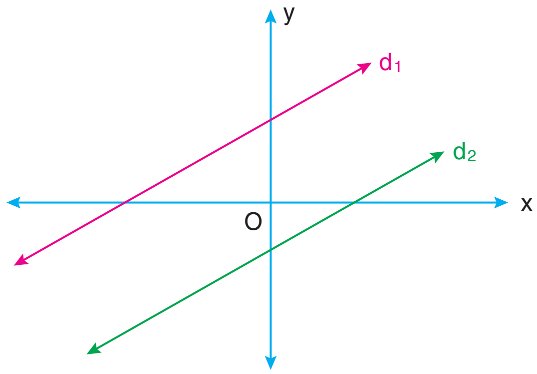
İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

d_1 doğrusunun denklemi, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve

d_2 doğrusunun denklemi, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ olsun.

1. Paralel olma durumu

$d_1 // d_2$ ise iki doğrunun eğimleri birbirine eşittir.



$m_{d_1} = -\frac{a_1}{b_1}$ ve $m_{d_2} = -\frac{a_2}{b_2}$ ise

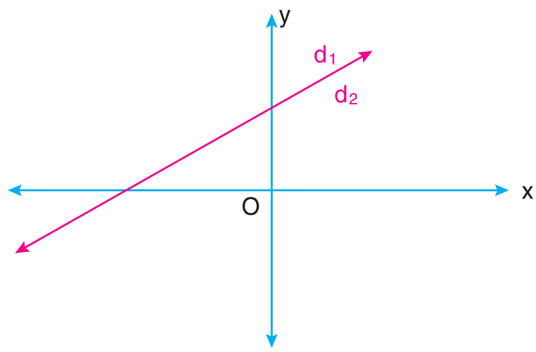
$\mathbf{m_{d_1} = m_{d_2}}$ ise $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ ise $\mathbf{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}}$ dir.

Bu durumda $d_1 \mathbin{/\mkern-5mu/} d_2$ ise $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ olur.

2. Çakışık olma durumu

Eğimleri eşit olan ve aynı noktalardan geçen doğrulara **çakışık doğrular** denir.

d_1 ve d_2 çakışık ise bu iki doğru aynı noktalardan geçer.

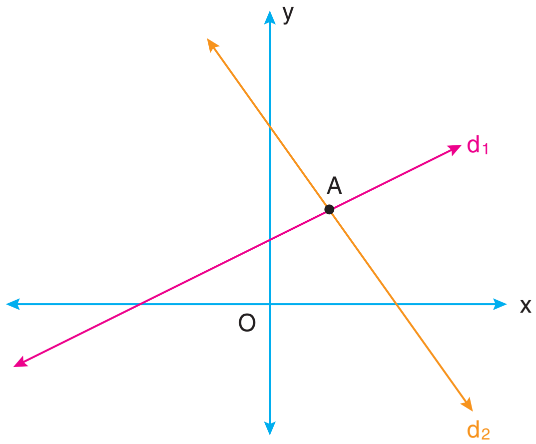


Bu durumda $\mathbf{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$ dir.

3. Kesişme durumu

d_1 ve d_2 bir noktada kesişiyorsa bu iki doğrunun eğimleri birbirine eşit değildir.

Bu durumda $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ olur.



d_1 ve d_2 doğrularının kesim noktası A ise

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesi A noktasıdır.

Örnek

$3x - 2y + 4 = 0$ ve $-6x + 4y - 3 = 0$ denklemleri ile verilen doğruların birbirine göre durumunu belirleyelim.

Çözüm

$3x - 2y + 4 = 0$ denkleminde $a_1 = 3$, $b_1 = -2$ ve $c_1 = 4$

$-6x + 4y - 3 = 0$ denkleminde $a_2 = -6$, $b_1 = 4$ ve $c_2 = -3$ tür. Buna göre

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$ olup

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ olduğundan doğrular birbirine paraleldir.

Örnek

$2x - 6y + 1 = 0$ ve $4x + (m + 2)y - 2 = 0$ denklemleri ile verilen doğrular birbirine paralel ise m kaçtır?

Çözüm

$2x - 6y + 1 = 0$ ve $4x + (m + 2)y - 2 = 0$ doğruları paralel olduğuna göre

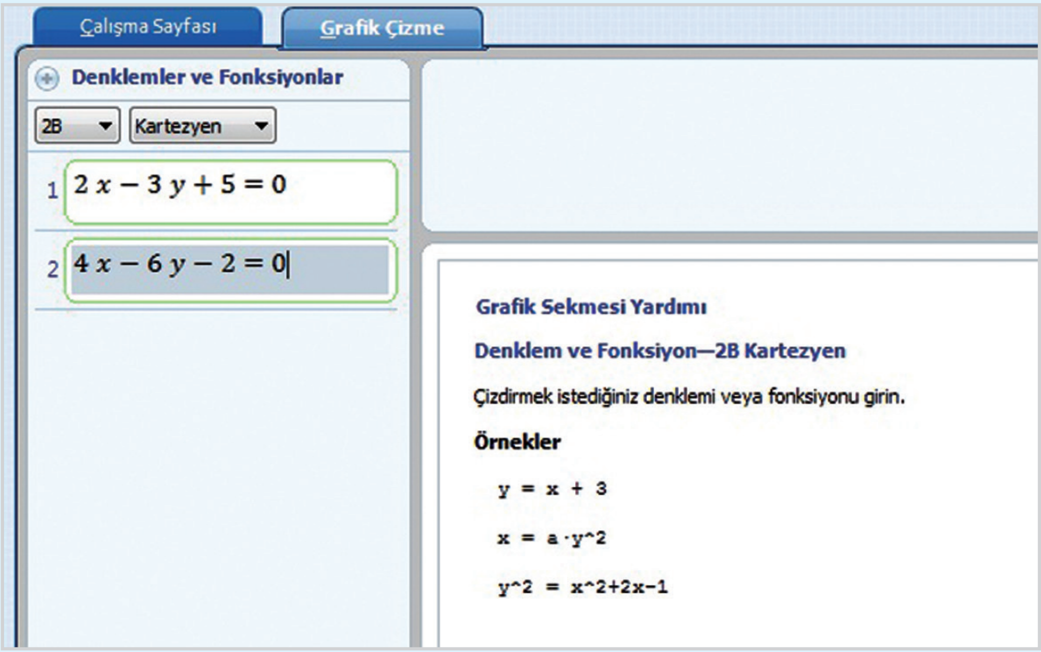
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ dir. Buradan, $\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{4}_2} = \frac{-6}{m + 2}$

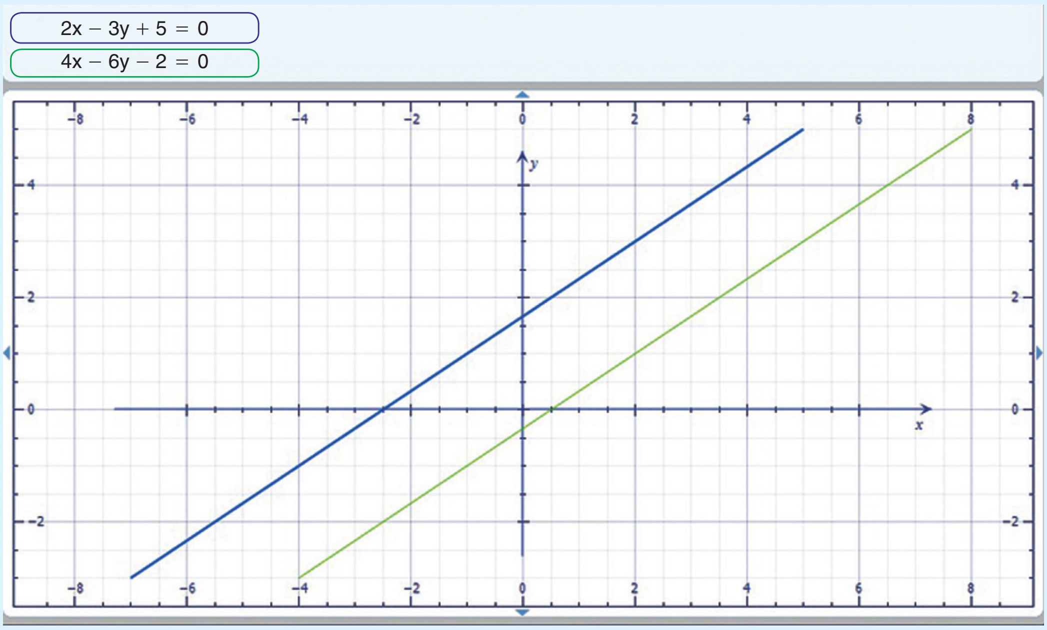
$m + 2 = -12 \Rightarrow m = -14$ bulunur.

2x – 3y + 5 = 0 ve 4x – 6y – 2 = 0 fonksiyonlarının grafiklerini bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak oluşturalım.

Bunun için bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak Denklemler ve Fonksiyonlar menüsünü açalım.

1. hücreye, 2x – 3y + 5 = 0; 2. hücreye 4x – 6y – 2 = 0 yazarak grafikleri oluşturalım.





2x – 3y + 5 = 0 ve 4x – 6y – 2 = 0 fonksiyonlarının grafiklerinin birbirine paralel olduğu görülür.

Örnek

$3x - 2y + m = 0$ ve $2x + ny + 3 = 0$ doğruları çakışık olduğuna göre m ve n değerlerini bulalım.

Çözüm

Doğrular çakışık olduğundan $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ olmalıdır.

$\frac{3}{2} = \frac{-2}{n} = \frac{m}{3}$ ise $\frac{3}{2} = \frac{-2}{n}$ ve $\frac{3}{2} = \frac{m}{3}$ eşitliklerinden,

$3n = -4$ ise $n = -\frac{4}{3}$ $\quad 2m = 9$ ise $m = \frac{9}{2}$ bulunur.

Örnek

$2x - 3y + 5 = 0$ ve $x + y - 5 = 0$ doğrularının kesim noktasını bulalım.

Çözüm

$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 5 &= 0 \\ x + y - 5 &= 0 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi, kesim noktasını verir.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -5 \\ 3/ \quad x + y &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -5 \\ + \quad 3x + 3y &= 15 \end{aligned}$$

$5x = 10 \Rightarrow x = 2$ olur.

$x = 2$ değerini $x + y = 5$ denkleminde yerine yazalım.

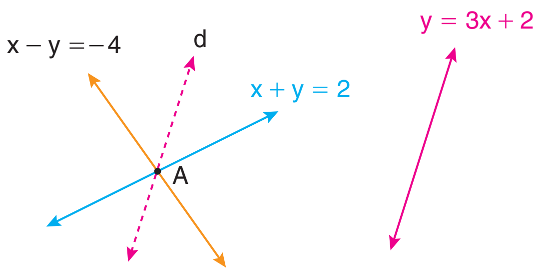
$2 + y = 5$ ise $y = 3$ tür.

Doğruların kesim noktası $(2, 3)$ olur.

Örnek

$x + y = 2$ ve $x - y = -4$ doğrularının kesim noktasından geçen ve $y = 3x + 2$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulalım.

Çözüm



$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ + \quad x - y &= -4 \\ \hline 2x &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$x + y = 2$ ise $x = -1$ için $-1 + y = 2$

$y = 3$ tür.

$x + y = 2$ ve $x - y = -4$ noktalarının kesim noktası $A(-1, 3)$ noktasıdır.

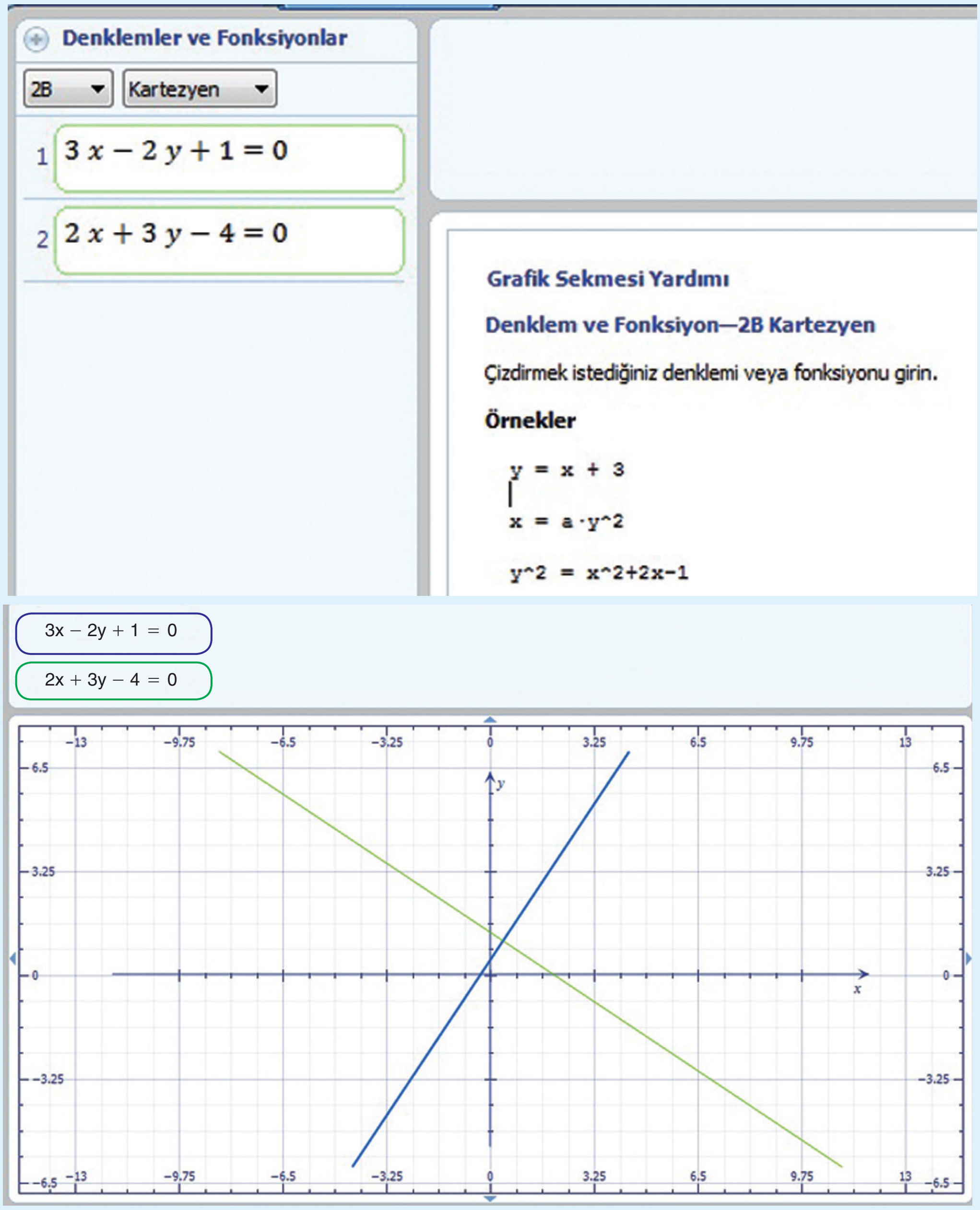
$A(-1, 3)$ noktasından geçen doğru, $y = 3x + 2$ doğrusuna paraleldir. d doğrusunun eğimi ile $y = 3x + 2$ doğrusunun eğimi eşit olup $m = 3$ tür. Bu durumda d doğrusunun denklemi,

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 3 = 3 \cdot (x - (-1)) \Rightarrow y - 3 = 3x + 3$ ise $-3x + y - 6 = 0$ olur.

$3x - 2y + 1 = 0$ ve $2x + 3y - 4 = 0$ fonksiyonlarının grafiklerini bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak oluşturalım.

Bunun için bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanarak Denklemler ve Fonksiyonlar menüsünü açalım.

1. hücreye, $3x - 2y + 1 = 0$; 2. hücreye, $2x + 3y - 4 = 0$ yazarak grafikleri oluşturalım.



$3x - 2y + 1 = 0$ ve $2x + 3y - 4 = 0$ fonksiyonlarının grafiklerinin birbirine dik olduğu görülür. Doğruların eğimleri sırasıyla $m_1 = \frac{3}{2}$ ve $m_2 = -\frac{2}{3}$ ise $m_1 \cdot m_2 = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$ dir.

d_1 doğrusunun eğim açısı α, eğimi m_1 ve d_2 doğrusunun eğim açısı θ, eğimi m_2 olmak üzere d_1 ile d_2 dik kesişiyorsa

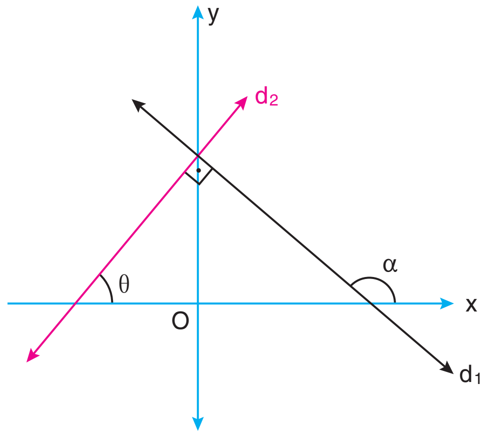
$m_1 = \tan\alpha, m_2 = \tan\theta$ ve

$\alpha = 90° + \theta$ olduğundan

$\tan\alpha = \tan(90° + \theta) = -\cot\theta$ dır.

$m_1 = \tan\alpha = -\cot\theta = -\dfrac{1}{\tan\theta} = -\dfrac{1}{m_2}$ ise $m_1 = \dfrac{-1}{m_2}$

eşitliğinden, $\mathbf{m_1 \cdot m_2 = -1}$ olur. Buna göre $d_1 \perp d_2$ ise $m_1 \cdot m_2 = -1$ dir.



Örnek

$2x + 3y - 1 = 0$ doğrusuna dik olan bir doğrunun eğimini bulalım.

Çözüm

$2x + 3y - 1 = 0$ doğrusunun eğimi $m_1 = -\dfrac{2}{3}$ tür.

Bu doğruya dik olan doğrunun eğimi m_2 olsun. $m_1 \cdot m_2 = -1$ ise $-\dfrac{2}{3} \cdot m_2 = -1$ ise $m_2 = \dfrac{3}{2}$ olur.

Örnek

$2x + 4y - 3 = 0$ doğrusuna dik olan ve $A(3, -1)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulalım.

Çözüm

$2x + 4y - 3 = 0$ doğrusunun eğimi, $m_1 = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$ dir. Bu doğruya dik olan doğrunun eğimi m_2 ise $m_1 \cdot m_2 = -1$,

$\dfrac{-1}{2} \cdot m_2 = -1$ ise $m_2 = 2$ olur. Buna göre $A(3, -1)$ noktasından geçen ve eğimi $m_2 = 2$ olan doğrunun denklemi,

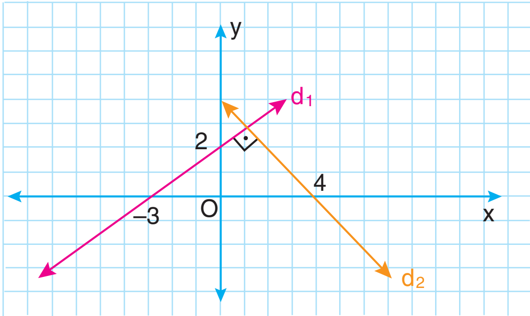
$y - y_1 = m_2 \cdot (x - x_1)$

$y - (-1) = 2 \cdot (x - 3)$ ise $y + 1 = 2x - 6$

$-2x + y + 7 = 0$ olur.

Örnek

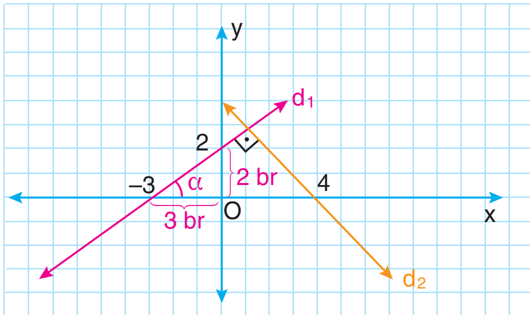
Şekildeki analitik düzlemde d_1 doğrusu x eksenini (–3,0) noktasında, y eksenini (0, 2) noktasında, d_2 doğrusu x eksenini (4, 0) noktasında kesmektedir. $d_1 \perp d_2$ olduğuna göre d_2 doğrusunun denklemini bulalım.



Çözüm

d_1 doğrusunun eğimi m_1 olmak üzere $m_1 = \tan\alpha = \frac{2}{3}$ tür.

$d_1 \perp d_2$ ve d_2 doğrusunun eğimi m_2 olmak üzere $m_1 \cdot m_2 = -1$ ise $\frac{2}{3} \cdot m_2 = -1$ ise $m_2 = -\frac{3}{2}$ dir.



d_2 doğrusu, grafiğe göre $(4,0)$ noktasından geçmektedir. Bu durumda d_2 doğrusunun denklemi

$$y - y_1 = m_2 \cdot (x - x_1)$$
$$y - 0 = -\frac{3}{2} \cdot (x - 4) \text{ ise } 2y = -3x + 12$$
$$3x + 2y - 12 = 0 \text{ olur.}$$

UYGULAYALIM 2-3

1. Aşağıda iki noktası verilen doğruların eğimlerini bulunuz.

$A(-1,2), B(3,-2)$	$m =$
$C(0,2), D(-2,0)$	
$E(-3,-2), F(1,-4)$	
$G(0,0), H(2,2)$	

2. Aşağıda denklemleri verilen doğruların eğimlerini bulunuz.

$x - 2y + 3 = 0$	$m =$	$2y + 3 = 0$	
$3x + y - 2 = 0$		$x = y - 1$	
$y = 3x - 1$		$2x + 3 = 0$	

3. Aşağıda bir noktası ve eğimi verilen doğruların denklemlerini yazınız.

$A(-1,2), m=3$	
$B(3,6), m=-\frac{1}{2}$	
$C(2,1), m=0$	
$D(-2,-2)$, m: tanımsız	

4. Aşağıda bir noktası ve eğim açısı (α) verilen doğruların denklemlerini yazınız.

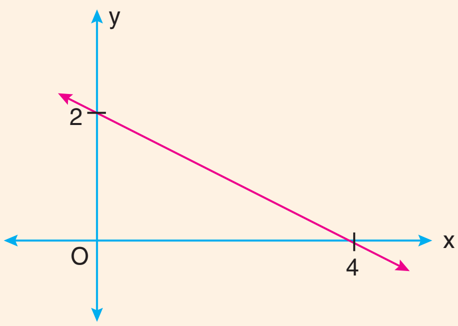
$A(1,-3), \alpha=45°$	
$B(-2,1), \alpha=30°$	
$C(-2,-2), \alpha=135°$	
$D(-3,-2), \alpha=0°$	

5. Aşağıda iki noktası verilen doğruların denklemlerini yazınız.

$A(1,3), B(-2,1)$	
$C(-3,0), D(1,2)$	
$E(0,0), F(2,2)$	
$G(1,6), H(2,-1)$	

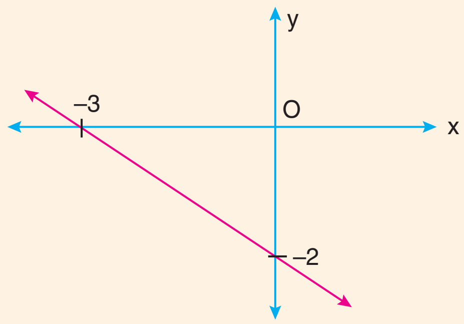
6. Aşağıda grafikleri verilen doğruların denklemlerini yazınız.

a)



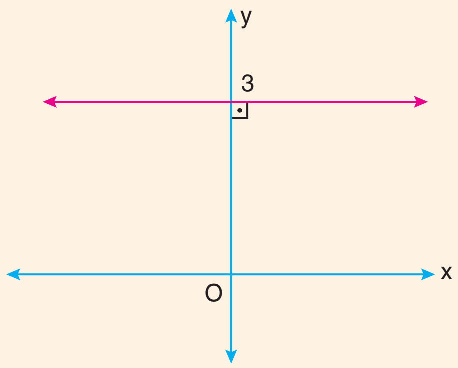
Doğrunun denklemi

b)



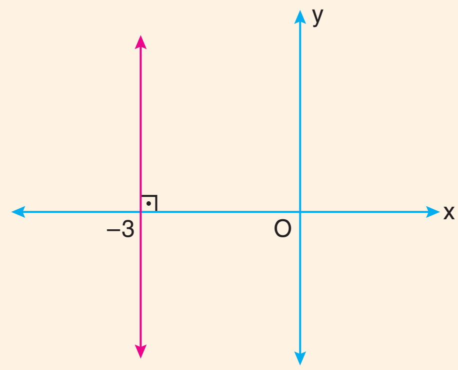
Doğrunun denklemi

c)



Doğrunun denklemi

ç)



Doğrunun denklemi

7. $3x - my + 2 = 0$ ve $x + 2y - 1 = 0$ doğruları paralel olduğuna göre m kaçtır?

A) –6 B) -3 C) 1 D) 3 E) 6

8. $(a-2)x + 3y - 2 = 0$ ve $4x + (b+1)y - 4 = 0$ doğruları çakışık olduğuna göre $(a+b)$ toplamı kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 10 E) 12

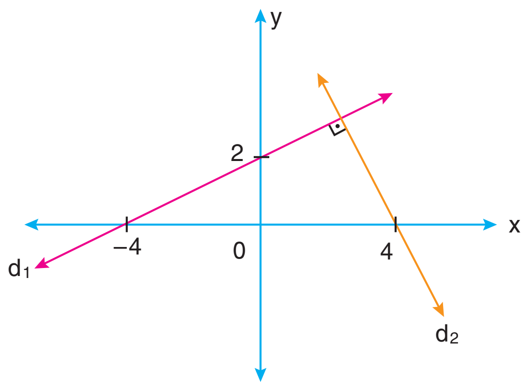
9. Aşağıdaki doğruların kesim noktalarını bulunuz.

$x + y - 2 = 0$ $2x - y + 5 = 0$	
$3x - 2y + 5 = 0$ $x + y - 1 = 0$	

10. $A(-2, 1)$ noktasından geçen ve $2x + y + 1 = 0$ doğrusuna dik olan doğrunun denklemini bulunuz.

11. $A(1, 4)$ noktasından geçen ve $2x - 4y + 1 = 0$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

12. Şekilde $d_1 \perp d_2$ olduğuna göre d_2 doğrusunun denklemini bulunuz.

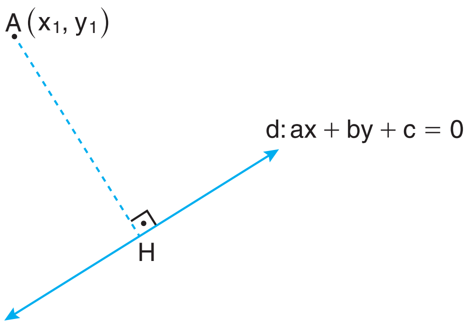


13. $(m+3)x + 2y - 5 = 0$ ve $2x + y + 3 = 0$ doğruları kesişmediğine göre m kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14. $x - 2y + 3 = 0$ ve $2x + 2y = 0$ doğrularının kesim noktası ile $B(1, -2)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

2.1.4. Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı



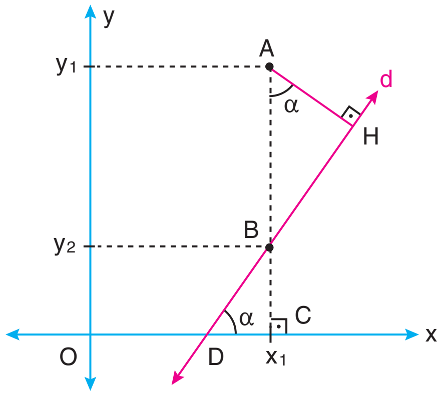
Aynı düzlem üzerinde alınan $A(x_1, y_1)$ noktasının

$d: ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı,

$$|AH| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ dir.}$$

Bir noktanın bir doğruya uzaklığı, nokta ile doğru arasındaki en kısa mesafedir.

Aşağıdaki şekilde $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ABH}) = m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{BAH})$ olduğundan $\widehat{BDC} \sim \widehat{BAH}$ dir. (Açı-açı benzerlik teoremi) Şekilde d doğrusunun eğimi $m = \tan\alpha$ ise $\widehat{BDC} \sim \widehat{BAH}$ benzerliğinden $m(\widehat{BAH}) = \alpha$ olur.



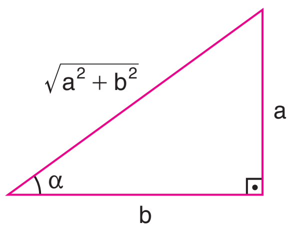
$d: ax + by + c = 0$ denkleminden $m = -\frac{a}{b}$ dir.

DCB dik üçgeninde; d doğrusunun $x = x_1$ deki ordinatı, $y_2 = mx_1 - \frac{c}{b} = -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}$ olacağından $|AB| = y_1 - y_2 = y_1 + \frac{a}{b}x_1 + \frac{c}{b}$ dir.

ABH dik üçgeninden;

$$|AH| = |AB|.\cos\alpha = \left(y_1 + \frac{a}{b}x_1 + \frac{c}{b}\right)\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ bulunur.}$$



$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Örnek

$A(1,2)$ noktasının $2x+3y-1=0$ doğrusuna olan uzaklığını bulalım.

Çözüm

A noktasının $2x+3y-1=0$ doğrusuna olan uzaklığı h olmak üzere

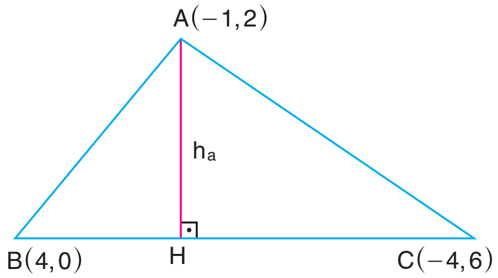
$$h=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2\cdot1+3\cdot2-1|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{7}{\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{13}}{13}\text{ br dir.}$$

Örnek

Köşelerinin koordinatları; $A(-1,2), B(4,0), C(-4,6)$ olan ABC üçgeninde $[BC]$ kenarına ait yüksekliğin uzunluğunu bulalım.

Çözüm

Şekli çizilen üçgende görüldüğü gibi $[BC]$ kenarına ait yüksekliğin uzunluğu, A noktasının BC doğrusuna olan uzaklığına eşittir.



Önce BC doğrusunun denklemini bulalım.

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}\text{ ise }\frac{y-6}{6-0}=\frac{x-(-4)}{-4-4}$$

$$\frac{y-6}{6}=\frac{x+4}{-8}$$

$$6x+24=-8y+48\text{ ise}$$

$$6x+8y-24=0\text{ dır.}$$

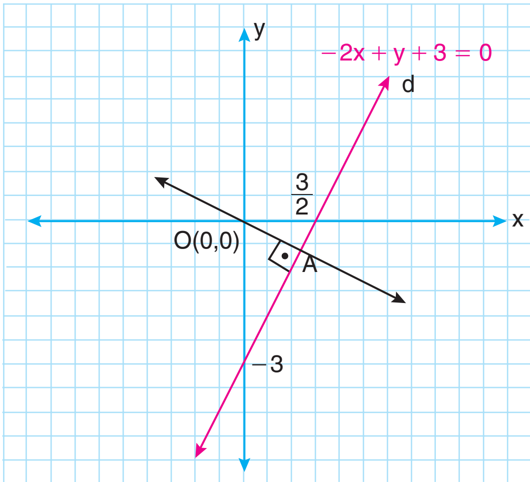
$A(-1,2)$ noktasının $6x+8y-24=0$ doğrusuna olan uzaklığı,

$$|HA|=h_a=\frac{|6.(-1)+8\cdot2-24|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{|-14|}{10}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}\text{ br olur.}$$

Örnek

$-2x+y+3=0$ doğrusu üzerinde, orijine en yakın olan noktayı bulalım.

Çözüm



Şekilde d doğrusunun denklemi $-2x+y+3=0$ dır.

$-2x+y+3=0$ doğrusunun grafiği yukarıda verilen şekildeki gibidir. Şekle göre doğru üzerinde orijine en yakın olan nokta A noktasıdır. OA doğrusu ile d doğrusunun kesim noktasını bulmalıyız.

$-2x+y+3=0$ doğrusunun eğimi, $m_d=-\frac{(-2)}{1}=2$ dir.

$d \perp OA$ olduğundan $m_d \cdot m_{OA}=-1$ ise $2 \cdot m_{OA}=-1$

$$m_{OA}=-\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Bu durumda $O(0,0)$ noktasından geçen ve eğimi $m_{OA}=-\frac{1}{2}$ olan doğrunun denklemi,

$y-0=-\frac{1}{2}\cdot(x-0)$ ise $y=-\frac{x}{2}$ olur.

A noktası, d doğrusu ile $y=-\frac{x}{2}$ doğrusunun kesim noktası olduğundan

$$\left.\begin{aligned} y&=-\frac{x}{2} \\ -2x+y+3&=0 \end{aligned}\right\} \text{ denklemlerinin ortak çözümünü bulmalıyız.}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{2}+y&=0 \\ -/\ -2x+y+3&=0 \end{aligned}\right\} \text{ ise } \quad \begin{aligned} \frac{x}{2}+\cancel{y}&=0 \\ +\ \ 2x-\cancel{y}-3&=0 \\ \hline \end{aligned}$$

$$\frac{5x}{2}=3 \text{ ise } x=\frac{6}{5} \text{ tir.}$$

$\frac{x}{2}+y=0$ ise $x=\frac{6}{5}$ için $\frac{6}{10}+y=0$ ise $y=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5}$ bulunur.

Bu durumda A noktası, $A\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right)$ tir.

Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

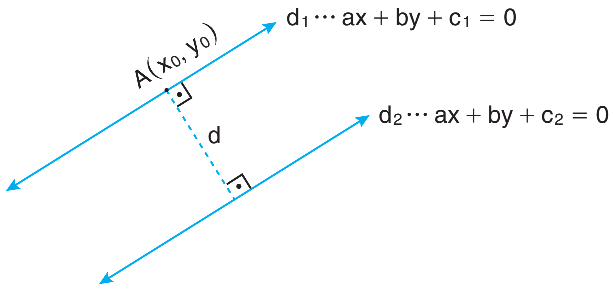
Denklemleri,

$d_1 \cdots ax + by + c_1 = 0$

$d_2 \cdots ax + by + c_2 = 0$

olan paralel iki doğru arasındaki uzaklık d ise

$$\mathbf{d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$ dir.



d_1 doğrusu üzerinde alınan herhangi bir $A(x_0, y_0)$ noktasının d_2 doğrusuna olan uzaklığını bulmalıyız.

Bu uzaklık d ise

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ olur.

A noktası d_1 doğrusu üzerinde alındığından $ax + by + c_1 = 0$ denklemini de sağlar. Buradan $ax_0 + by_0 + c_1 = 0$ ise $ax_0 + by_0 = -c_1$ yazılabilir. Bu eşitlik yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$d = \frac{|\overbrace{ax_0 + by_0}^{-c_1} + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ elde edilir.

Örnek

Denklemleri $3x + 2y - 5 = 0$ ve $3x + 2y + 5 = 0$ olan doğrular arasındaki uzaklığı bulalım.

Çözüm

$\frac{3}{3} = \frac{2}{2} = 1$ olduğundan verilen doğrular paraleldir.

$a = 3, b = 2, c_1 = -5$ ve $c_2 = 5$ tir. Bu iki doğru arasındaki uzaklık d olmak üzere

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-5 - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$ br bulunur.

Örnek

Denklemleri $2x-3y+1=0$ ve $6y-4x+4=0$ olan doğrular arasındaki uzaklığı bulalım.

Çözüm

$d_1 \cdots 2x-3y+1=0$ ve $d_2 \cdots 6y-4x+4=0 \quad (-4x+6y+4=0)$ veriliyor.

$\frac{2}{-4}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$ olduğundan $d_1 // d_2$ dir.

$d_1 \cdots 2x-3y+1=0$ doğrusunun denklemini –2 ile genişleterek $-4x+6y-2=0$ şeklinde yazılabiliriz.

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \cdots -4x+6y-2=0 \\ d_2 \cdots -4x+6y+4=0 \end{array}\right\} \text{ise } a=-4, b=6, c_1=-2 \text{ ve } c_2=4 \text{ tür.}$$

O hâlde d_1 ile d_2 doğruları arasındaki uzaklık d olmak üzere

$$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-2-4|}{\sqrt{(-4)^2+6^2}}=\frac{6}{\sqrt{52}}=\frac{6}{2\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13} \text{ br bulunur.}$$

UYGULAYALIM 2-4

1. Aşağıda verilen noktaların, yanlarında denklemleri verilen doğrulara olan uzaklıklarını bulunuz.

a) $A(-2,0)$, $2x-y+1=0$ **b)** $B(0,0)$, $3x+2y-4=0$ **c)** $C(-1,4)$, $3y-2x+5=0$

2. Aşağıdaki doğru çiftlerinin birbirine olan uzaklıklarını bulunuz.

a) $-x+y-2=0$, $-x+y+2=0$

b) $2x-y+1=0$, $4x-2y-5=0$

c) $3y-x+2=0$, $2x-6y+4=0$

3. Köşe noktaları $A(-2,1), B(1,3), C(-3,-3)$ olan üçgenin $[AB]$ kenarına ait yüksekliğinin uzunluğunu bulunuz.

4. $2x-4y+8=0$ doğrusu üzerindeki noktalardan orijine en yakın olanının koordinatlarını bulunuz.

5. Uzun kenarları $3x+2y+5=0$ ve $6x+4y-5=0$ doğruları üzerinde olan dikdörtgenin kısa kenarlarının uzunluğunu bulunuz.

2. DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Analitik düzlemde $A(1,3)$ ile $B(4,0)$ noktaları arasındaki uzaklık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) 5

2. $A(3,-2)$ noktasının x eksenine olan uzaklığı kaç birimdir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{13}$ E) 4

3. $B(m-1,\ m-4)$ noktası analitik düzlemin dördüncü bölgesinde ise m nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 8 E) 10

4. $A(-2,n)$ ve $B(4,3)$ noktaları arasındaki uzaklık 10 birim ise n nin alabileceği pozitif tam sayı değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 11 B) 9 C) 7 D) 6 E) 1

5. $A(4,0)$ ve $B(1,3)$ noktaları veriliyor. $[AB]$ üzerinde bir $C(x,y)$ noktası alınıyor. $|CA|=2|CB|$ olduğuna göre C noktasının ordinatı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. Köşe noktaları $A(1,3), B(3,1), C(0,0)$ olan üçgenin ağırlık merkezinin koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ B) $\left(\frac{1}{2},2\right)$ C) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ D) $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ E) $\left(\frac{4}{3},5\right)$

7. $A(2,a), B(6,-4), C(b,2)$ ve $[AC]$ nın orta noktası B ise $a+b$ toplamı kaçtır?

A) –2 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

8. Analitik düzlemde $m > 0$ olmak üzere $A(6,2m)$ ve $B(3m,10)$ noktaları veriliyor. $[AB]$ nın orta noktası x ve y eksenlerine eşit uzaklıkta olduğuna göre m kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. $A(-3,-2)$ ve $B(2,3)$ noktalarına eşit uzaklıkta bulunan ve x ekseni üzerinde olan noktanın apsisi kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

10. Köşelerinin koordinatları $A(2,-1), B(4,2), C(-2,3)$ olan ABC üçgeninin $[AC]$ kenarına ait kenarortayının uzunluğu kaç birimdir?

A) 2 B) 3 C) $\sqrt{11}$ D) $\sqrt{17}$ E) 5

11. A, B, C doğrusal olmak üzere $A(-1,5), B(5,-3)$ olan $[AB]$ veriliyor. $C \notin [AB]$ olacak şekilde $C(x,y)$ noktası seçiliyor. $|AC| = 3.|CB|$ olduğuna göre C noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(5,-5)$ B) $(-5,5)$ C) $(7,-7)$ D) $(8,-7)$ E) $(9,9)$

12. $A(-5,3)$ ve $B(2,m)$ noktalarından geçen doğrunun eğim açısı 135° olduğuna göre m kaçtır?

A) -4 B) -3 C) -2 D) 1 E) 2

13. $A(-3,2)$ ve $B(a,4)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi 3 olduğuna göre a kaçtır?

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $-\frac{7}{3}$ D) $\frac{8}{3}$ E) 4

14. Aşağıda denklemi verilen doğruların eğimlerini bulunuz.

a) $2x - 5y + 1 = 0$

b) $y + 3x - 1 = 0$

c) $3y = -x - 2$

ç) $y - 5 = 0$

15. $ax - y = 12$

$4x + (a + 4)y = -12$

denklemleriyle verilen doğrular paralel ise a kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

16. Denklemleri $2x + 3y - 3 = 0$ ve $x - 2y + 2 = 0$ olan doğruların kesim noktasından geçen ve x ekse-nine paralel olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = 1$ B) $x = 1$ C) $y = x$ D) $2y - 1 = 0$ E) $y = 2x$

17. Denklemleri $(m - 4)x + 2y + 2 = 0$ ve $4y - 2x = 3$ olan doğruları birbirine dik olduğuna göre m kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

18. $A(-3, 5)$ noktasının denklemi $y = 3x + 2$ olan doğruya olan uzaklığı kaç birimdir?

A) $\sqrt{10}$ B) $2\sqrt{10}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ D) $\frac{6}{5}\sqrt{10}$ E) $5\sqrt{10}$

19. Denklemleri $x - 2y = 0$ ve $x - 2y + 10 = 0$ olan doğrular arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $3\sqrt{5}$ E) 5

20. Köşelerinin koordinatları $A(-2,2), B(4,0), C(2,-4)$ olan ABC üçgeninde $[AC]$ kenarına ait yüksekliğin uzunluğu kaç birimdir?

A) $\sqrt{13}$ B) $5\sqrt{13}$ C) $\frac{14\sqrt{13}}{13}$ D) $\frac{20\sqrt{13}}{13}$ E) 20

21. Denklemleri $3x+4y-2m=0$ ve $6x+8y+4m=0$ olan doğrular arasındaki uzaklık 4 birim olduğuna göre m nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

22. Denklemleri $x=5y-2$ ve $x-5y=-8$ olan doğrular arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) $\sqrt{26}$ B) $\frac{\sqrt{26}}{13}$ C) $\frac{3\sqrt{26}}{13}$ D) $4\sqrt{26}$ E) $5\sqrt{26}$

23. Denklemleri $-2x+3y-1=0$ ve $3y-2x+2=0$ olan doğrular arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) $\sqrt{13}$ B) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ C) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ D) $\frac{9\sqrt{13}}{13}$ E) $\frac{10\sqrt{13}}{13}$

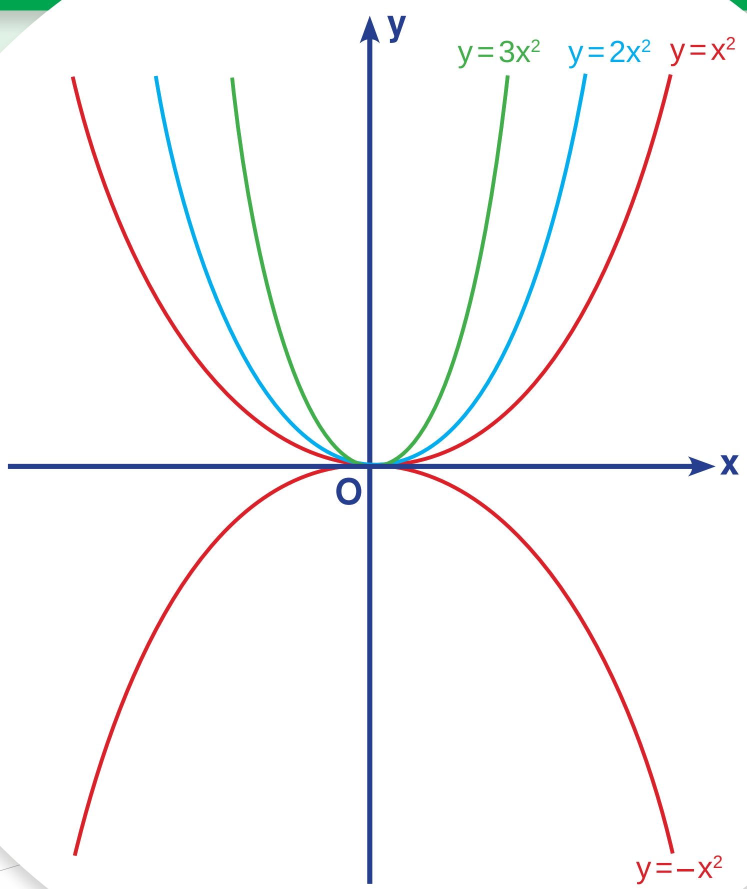
24. Denklemi $-x+2y-4=0$ olan doğru üzerindeki noktalardan orijine en yakın olanın koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left(-\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$ B) $\left(-\frac{3}{5},\frac{9}{5}\right)$ C) $\left(-\frac{4}{5},\frac{9}{5}\right)$ D) $\left(\frac{2}{5},\frac{9}{5}\right)$ E) $\left(\frac{3}{5},\frac{9}{5}\right)$

25. Denklemi $x-y=16$ olan doğru üzerindeki noktalardan orijine en yakın olanın koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-8,-6)$ B) $(8,-8)$ C) $(8,-4)$ D) $(6,-6)$ E) $(6,-4)$

3. FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR



3.1. FONKSİYONLARLA İLGİLİ UYGULAMALAR

3.1.1. Fonksiyonun Grafik ve Tablo ile Temsili

Fonksiyonlar pratik hayatta bir girdiye bağlı olarak çıktıdaki değişkenliği göstermede kullanılabilir. Örneğin bir ağacın boyunun zamana göre değişimi, bir aracın gittiği mesafe ile yakıt tüketimi arasındaki ilişki vb.

Bu bölümde $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$ şeklindeki fonksiyonların grafikleri ile ilgili örnekler verilecektir.

Örnek



Bir kırtasiyede kullanılan fotokopi makinesinde x, çekilen fotokopinin sayfa sayısını,

$f(x)$ fotokopi sayfa sayısının çekim süresini (saniye) gösterir.

$f(x) = 3x + 20$ dir. Buna göre

a) 50 sayfa fotokopi kaç saniyede çekilir?

b) 320 saniyede kaç sayfa fotokopi çekilir?

Çözüm

a) $f(x) = 3x + 20$ ise $y = 3x + 20$ dir. Buna göre

$f(x) = 3x + 20$ ise 50 sayfa fotokopi $x = 50$ için $f(50) = 3 \cdot 50 + 20 = 170$ saniyede çekilir.

b) $f(x) = 3x + 20$ ise $y = 320$ için saniyede $320 = 3x + 20$ ise $3x = 300$ ise

$x = 100$ sayfa fotokopi çekilir.

Örnek

Bir araba düz bir yolda şehir dışında ve çift yönlü karayollarında, hız kuralları gereği hız sınırını aşmadan 90 km/sa. sabit hızla gitmektedir. Buna göre bu araba

a) 5 saatin sonunda kaç km yol almış olur?

b) 270 km lik yolu kaç saatte alır?

c) Alınan mesafe ile zaman arasındaki ilişkiyi grafik üzerinde gösterelim.

Çözüm

a) x: arabanın belirli bir mesafeyi alma süresi (saat)

$f(x) = 90 \cdot x$ tir. Buna göre araba 5 saatin sonunda

$x = 5$ için $f(5) = 90 \cdot 5$

$= 450$ km yol alır.

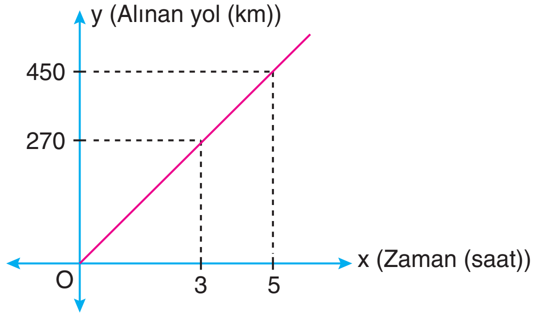
b) $f(x) = 90 \cdot x$ ise 270 km lik mesafe

$270 = 90 \cdot x$

$x = 3$ saatte alınır.

c) Değer tablosunu oluşturalım.

x	0	3	5
y	0	270	450



Araç sabit hızla gittiğinden alınan yol ile zaman arasında doğrusal ilişki vardır.

Örnek

Küp şeklindeki içi boş bir akvaryum su ile doldurulmak isteniyor. Doldurulan her 1 litre su ile akvaryumdaki suyun yüksekliği doğrusal olarak 0,5 cm artmaktadır. Cam kalınlığı 1 cm olan akvaryumun taban camının kalınlığı da suyun yüksekliğine dâhildir. Buna göre

a) Akvaryumdaki suyun yüksekliğinin su miktarına bağlı değişimini grafikle gösterelim.

b) 25 litre su doldurulduktan sonra akvaryumdaki suyun yüksekliği ne kadar olur?

c) Akvaryumdaki suyun yüksekliği 30 cm olduğunda akvaryumdaki su miktarını bulalım.

Çözüm

a) x: akvaryuma doldurulan su miktarı (litre)

$f(x) = 0,5 \cdot x + 1$

$= \frac{1}{2}x + 1$ olur.

↓ (taban camının kalınlığından kaynaklanan yükseklik)

$x = 0$ için $f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1$,

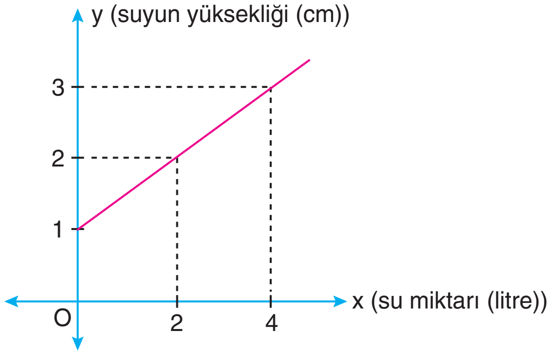
$x = 2$ için $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$,

$x = 4$ için $f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 + 1 = 3$ olur.

Buna göre değişim tablosu şöyledir:

x	0	2	4
$f(x)$	1	2	3

Değişimin grafiği



b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ise 25 litre su doldurulduğunda akvaryumdaki su,

$x = 25$ için $f(25) = \frac{1}{2} \cdot 25 + 1$

$= 13,5$ cm yükselir.

c) Suyun yüksekliği 30 cm ise akvaryumda,

$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

$30 = \frac{1}{2}x + 1$

$\frac{1}{2}x = 29$

$x = 58$ litre su vardır.

ETKİNLİK

Bir mühendis, insan görünümünde bir robot tasarlamak istiyor. Bunun için robotun ayak uzunluğuyla boy uzunluğu arasında aşağıdaki gibi bir ilişki kuruyor.

R robotun boyu, F bu robota ait ayak uzunluğu olmak üzere

$R = (2,5 \cdot F + 60)$ cm dir.

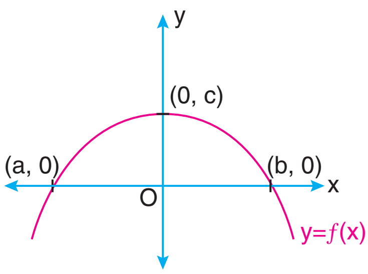


Buna göre aşağıdaki soruları boş bırakılan alanlarda çözünüz.

Mühendis, robotun ayağının 20 cm olmasını isterse boyunu kaç cm yapmalıdır?	
150 cm uzunluğunda bir robot tasarlamak isterse robotun ayak uzunluğu kaç cm olmalıdır?	

Fonksiyonun x ve y Eksenini Kestiği Noktalar

Koordinat sisteminde x eksenindeki noktaların ordinatları sıfırdır. Fonksiyonda y=0 için x in alacağı değerler bulunur.



Şekilde $f(x)$ fonksiyonunun grafiği x eksenini (a,0) ve (b,0) noktalarında kesmektedir. Bu noktalarda $y = 0$ dır. Grafik y eksenini (0,c) noktasında keser. Bu noktada $x = 0$ dır.

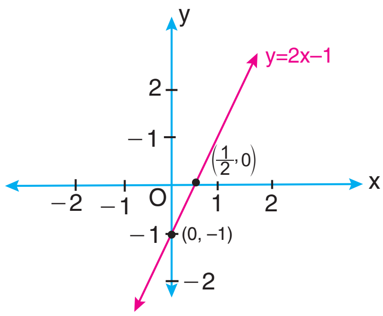
Örnek

$x \in \mathbb{R}$ için $y = f(x) = 2x - 1$ fonksiyonunun x ve y eksenini kestiği noktaları bularak grafik üzerinde gösterelim.

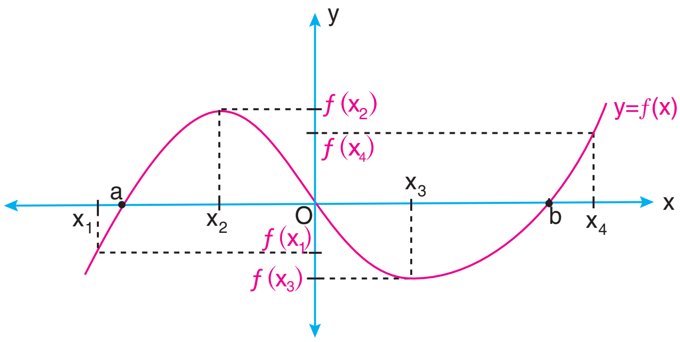
Çözüm

$y = 2x - 1$ ise $x = 0$ için $y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ olduğundan fonksiyonun grafiği y eksenini $(0, -1)$ noktasında keser.

$y = 2x - 1$ ise $y = 0$ için $0 = 2x - 1$ ise $2x = 1$ ise $x = \frac{1}{2}$ olduğundan fonksiyonun grafiği x eksenini $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ noktasında keser. Buna göre fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi olur.



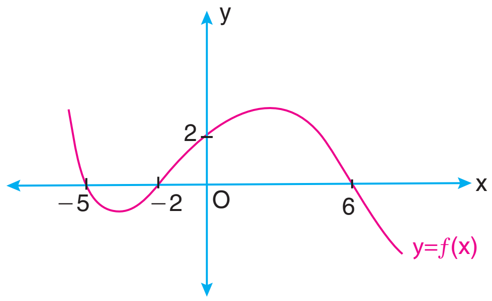
Fonksiyonun Pozitif ve Negatif Olduğu Aralıklar



Yukarıdaki grafiğe göre $x_1 < a$ için $f(x_1) < 0$ ve $0 < x_1 < b$ için $f(x_3) < 0$ olduğundan fonksiyon bu aralıklarda negatif değer alır. Yani grafikte x ekseninin altında kalan kısım negatiftir. Dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonun negatif olduğu araklık $(-\infty, a), (0, b)$ dır.

$a < x_2 < 0$ için $f(x_2) > 0$ ve $b < x_4$ için $f(x_4) > 0$ olduğundan fonksiyon bu aralıklarda pozitif değer alır. Fonksiyonun pozitif olduğu aralık $(a, 0), (b, \infty)$ dır. Yani grafikte x ekseninin yukarısında kalan kısım pozitiftir.

Örnek



Yukarıdaki grafiğe göre $y = f(x)$ fonksiyonunun pozitif ve negatif olduğu aralıkları bulalım.

Çözüm

$(-\infty,-5)$ ve $(-2,6)$ aralıklarında grafik x ekseninin üst kısmında kalmaktadır. Dolayısıyla $y = f(x)$ fonksiyonunun pozitif olduğu aralık $(-\infty,-5),(-2,6)$ olur.

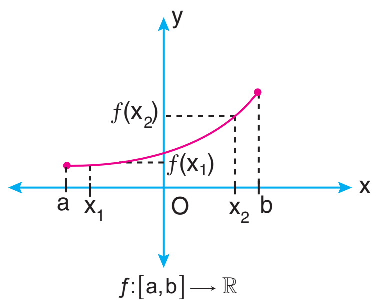
$(-5,-2)$ ve $(6,\infty)$ aralıklarında grafik x ekseninin alt kısmında kalmaktadır. Dolayısıyla $y = f(x)$ fonksiyonunun negatif olduğu aralık $(-5,-2),(6,\infty)$ olur.

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

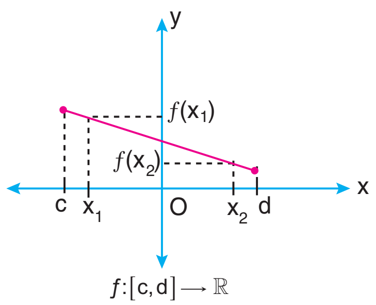
$A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq A$ ve $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir f fonksiyonu verilmiş olsun. Her $x_1, x_2 \in B$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa $f(x)$ fonksiyonuna B de artan fonksiyon, her $x_1, x_2 \in B$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa $f(x)$ fonksiyonuna B de azalan fonksiyon denir.

Grafiğe göre,

$[a,b]$ nda $\forall x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan bu aralıkta $y = f(x)$ fonksiyonu artandır.

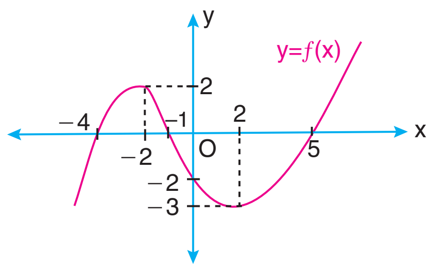


$[c,d]$ nda $\forall x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ olduğundan bu aralıkta $y = f(x)$ fonksiyonu artandır.



Örnek

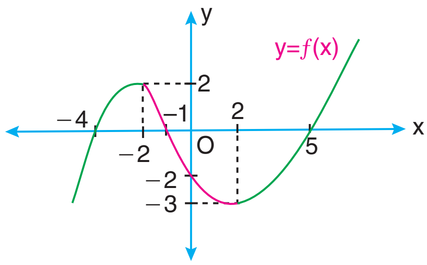
Aşağıdaki grafiğe göre $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunda artan ve azalan olan aralıkları bulalım.



Çözüm

Grafiğe göre $(-\infty,-2]$ ve $[2,\infty)$ aralıklarında artan her x değeri için $f(x)$ te artan değerler alır. Dolayısıyla $y = f(x)$ fonksiyonunun artan olduğu aralık $(-\infty,-2]$, $[2,\infty)$olur.

$(-2,2)$nda artan her x değeri için $f(x)$ azalan değerler almaktadır. Dolayısıyla fonksiyonun azalan olduğu aralık $[-2,2]$ dır.



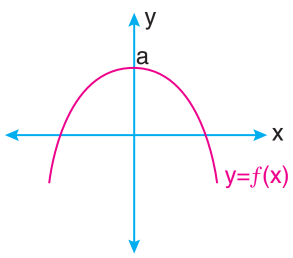
Maksimum ve Minimum Değerler

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı fonksiyonun tanım kümesi içerisinde aldığı en büyük değere fonksiyonun maksimum değeri, en küçük değere **minimum değeri** denir.

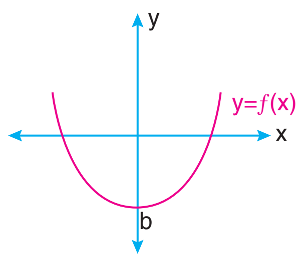
Diğer bir ifadeyle f fonksiyonu $x = c$ de tanımlı ve

1) f nin tanım kümesindeki her x için $f(x) < f(c)$, $f(c)$ ye f nin maksimum değeri denir.

2) f nin tanım kümesindeki her x için $f(x) > f(c)$ ise $f(c)$ ye f nin minimum değeri denir.



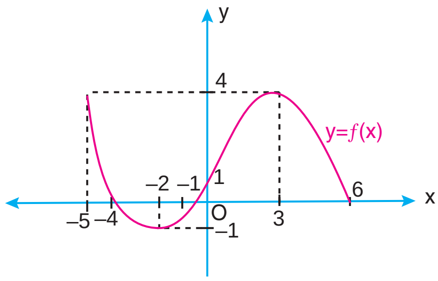
$f(x)$ fonksiyonunun maksimum değeri a dır.



$f(x)$ fonksiyonunun minumum değeri b dir.

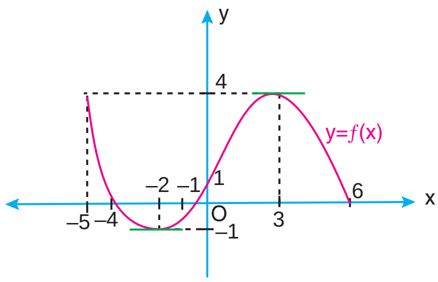
Örnek

Yandaki şekilde verilen $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu için maksimum ve minimum değeri bulalım.

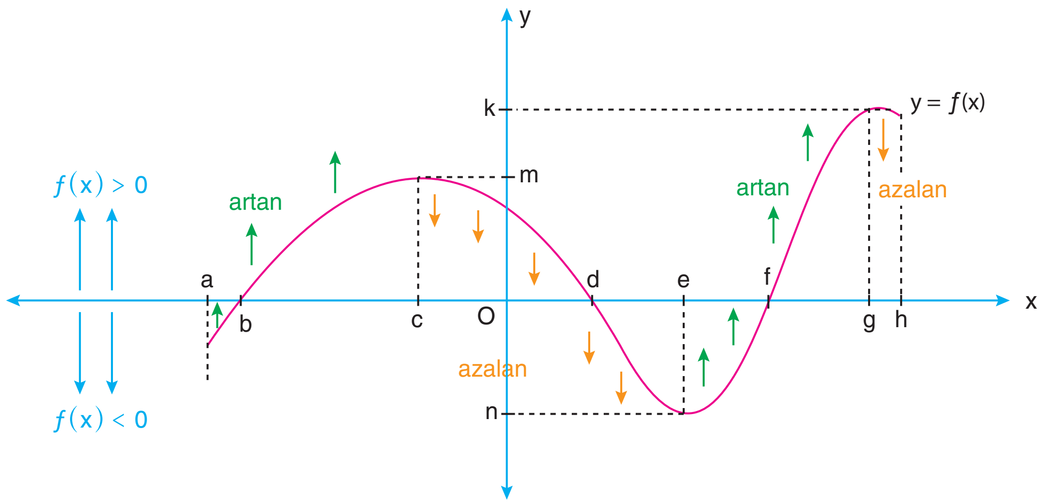


Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini incelediğimizde fonksiyon en büyük değerini $(3,4)$ noktasında, en küçük değerini $(-2,-1)$ noktasında almıştır. $f(3) = 4$ ve $f(-2) = -1$ olduğuna göre fonksiyonun maksimum değeri 4, minimum değeri –1 dir.



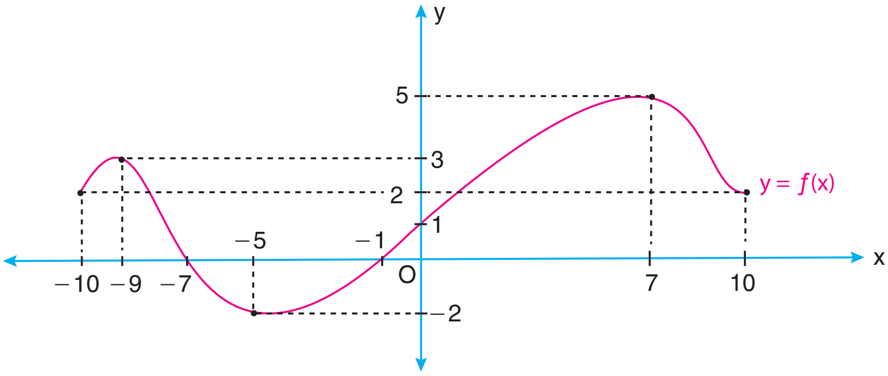
SONUÇ



$f:[a,h] \longrightarrow [n,k]$ olsun.

- Şekildeki $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinde, $f(x) = 0$ denkleminin kökleri grafiğin x eksenini kestiği noktalarıdır. $x = 0$ için $f(x)$ in alacağı değer ise grafiğin y eksenini kestiği noktadır.
- Grafiğin x ekseninin yukarısında kalan aralıklarda fonksiyon pozitif, x ekseninin altında kalan aralıklarda ise fonksiyon negatiftir.
- x artan değer aldıkça y nin aldığı değerler artıyorsa fonksiyon **artan**, y nin aldığı değerler azalıyorsa fonksiyon **azalandır**. Grafiğe göre $f(x)$ fonksiyonu $[a,c]$ ve $[e,g]$ nda artan, $[c,e]$ ve $[g,h]$ nda azalandır.
- y ekseni üzerindeki en büyük değere karşılık gelen nokta **maksimum**, en küçük değere karşılık gelen nokta ise **minimum değerdir.** Grafiğe göre $f(x)$ fonksiyonunun maksimum değeri k, minumum değeri ise n dir.

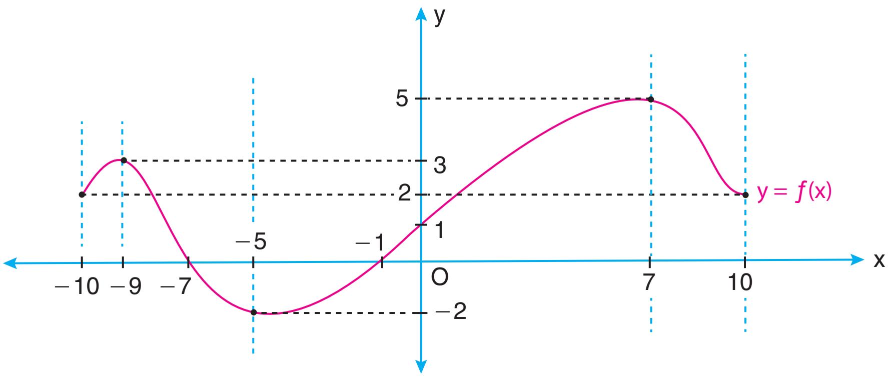
Örnek



Yukarıda $f:[-10,10] \longrightarrow [-2,5]$, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre grafiğin x ve y eksenini kestiği noktaları, fonksiyonun pozitif, negatif, artan ve azalan olduğu aralıkları, fonksiyonun maksimum ve minimum değerini bulalım.

Çözüm

Grafik, $(-7,0)$ ve $(-1,0)$ noktalarında x eksenini, $(0,1)$ noktasında y eksenini kesmiştir. Buna göre x eksenini kestiği noktalarda y nin değeri 0 (sıfır), y eksenini kestiği noktalarda ise x in değeri 0 (sıfır) dır.



Grafik, $[-10,-7], [-1,10]$ aralıklarında x ekseninin yukarısında olduğundan bu aralıklarda fonksiyon pozitif, $[-7,-1]$ aralığında x ekseninin altında kaldığından fonksiyon bu aralıkta negatiftir.

$[-10,-9], [-5,7]$ aralıklarında x, artan değerler aldıkça y nin değeri de arttığından fonksiyon bu aralıklarda artan; $[-9,-5], [7,10]$ aralıklarında x, artan değerler aldıkça y nin değeri azaldığından fonksiyon bu aralıklarda azalandır.

Fonksiyon $(7,5)$ noktasında maksimum, $(-5,-2)$ noktasında minimum değerini almıştır.

Buna göre fonksiyonun $x \in [-10,10]$ nda maksimum değeri 5, minimum değeri -2 dir.

Örnek

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x) = x + 2$ fonksiyonunun grafiğini çizerek fonksiyonun artan veya azalan olup olmadığını tespit edelim.

Çözüm

Önce grafiğin x ve y eksenlerini kestiği noktaları bulalım.

$y = f(x) = x + 2$ ise

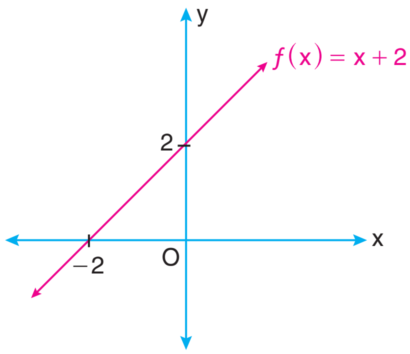
$x = 0$ için $y = 0 + 2$

$= 2$

$y = 0$ için $0 = x + 2$

$x = -2$

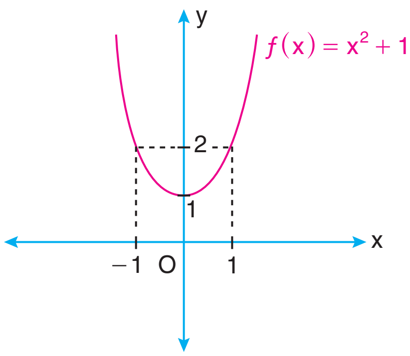
Buna göre grafik $(0, 2)$ ve $(-2, 0)$ noktalarında eksenleri keser.



x eksenindeki değerler arttıkça y eksenindeki değerler de arttığından $f(x) = x + 2$ fonksiyonu artandır.

Örnek

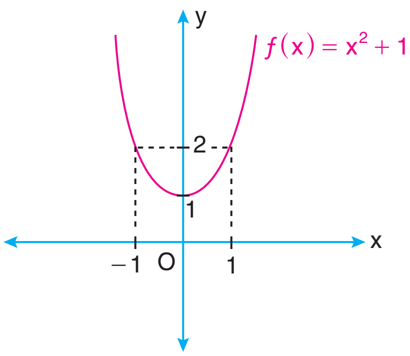
Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları ve fonksiyonun minimum değerini bulalım.



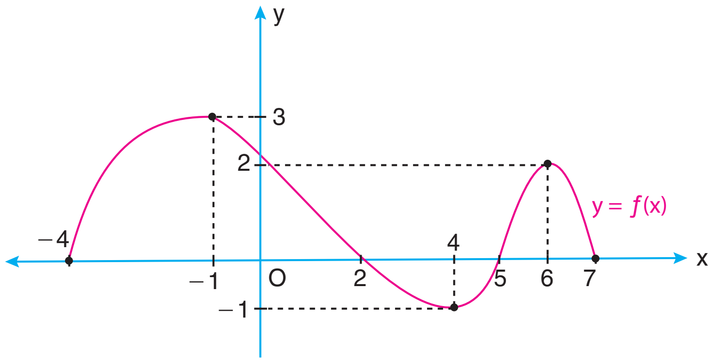
Çözüm

Grafik üzerinde fonksiyonun en küçük değerini $(0, 1)$ noktasında aldığını görmekteyiz. Buna göre fonksiyonun minimum değeri $\min(f(x)) = 1$ dir.

x ekseni üzerindeki değerler arttıkça $(-\infty, 0]$ aralığında y eksenindeki değerlerin azaldığı, $[0, \infty)$ aralığında ise y eksenindeki değerlerin arttığı görülmektedir. Buna göre fonksiyon $(-\infty, 0]$ aralığında azalan, $[0, \infty)$ aralığında artandır.



Örnek



Yukarıdaki şekilde $f:[-4,7] \longrightarrow [-1,3]$, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

a) $f(x) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini,

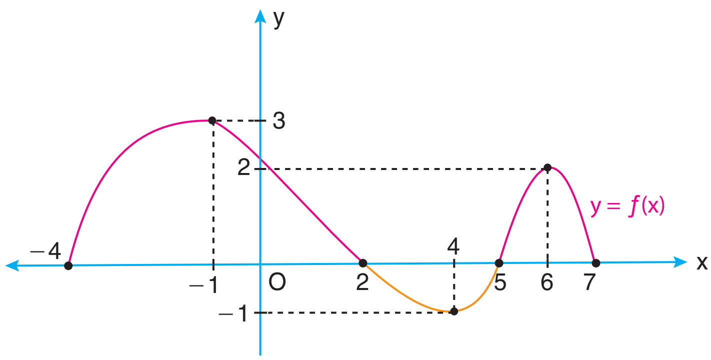
b) $f(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini,

c) Fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini bulalım.

Çözüm

a) $f(x) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi, $f(x)$ in grafiğinin, x ekseninin üzerinde olduğu aralıklar ile grafiğin x eksenini kestiği noktaların birleşimidir. Buna göre

$f(x) \geq 0$ ise $x \in ([-4,2] \cup [(5,7)])$ dır. Yani Ç $= [-4,2] \cup [5,7]$ dır.



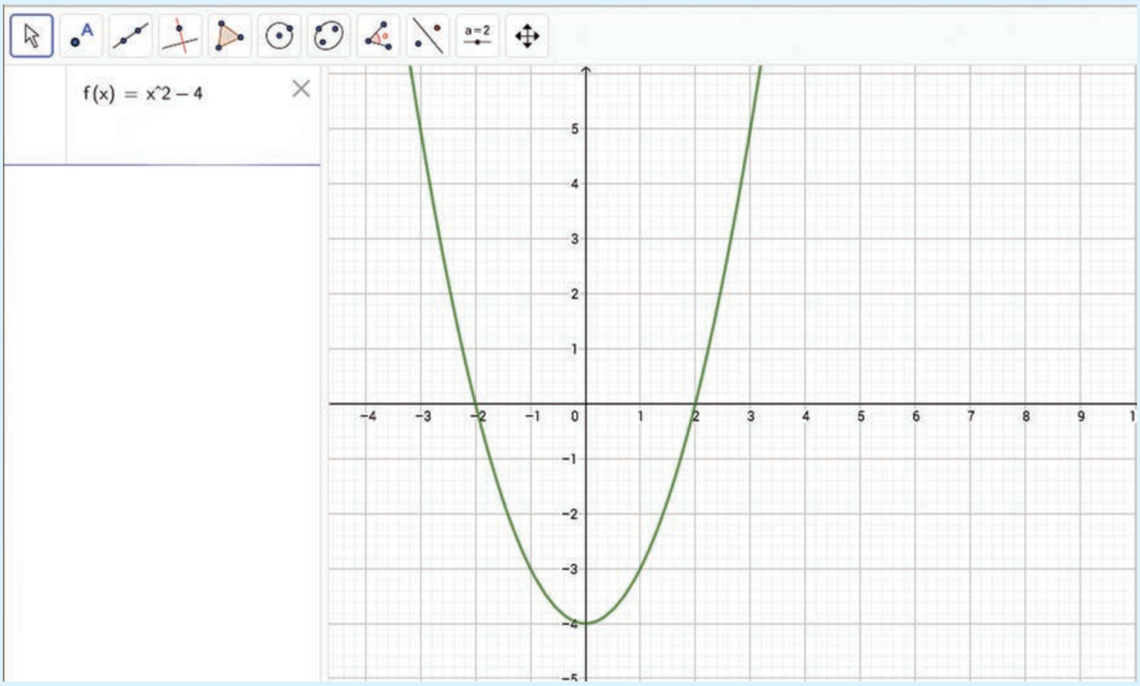
b) $f(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulmak için grafiğin x ekseninin altında kalan kısmına bakmalıyız.

Buna göre Ç $= (2,5)$ olur.

c) Maksimum değeri: $f(-1) = 3$

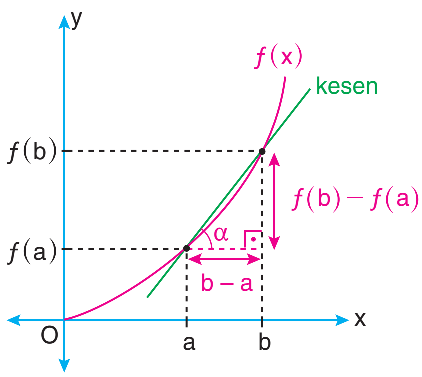
Minimum değeri: $f(4) = -1$

Dinamik Matematik ve Geometri Programından yararlanarak fonksiyon giriş alanına $x^2 - 4$ yazalım.



Grafikten fonksiyonun minimum değerini $(0, -4)$ noktasında aldığı görülmektedir.

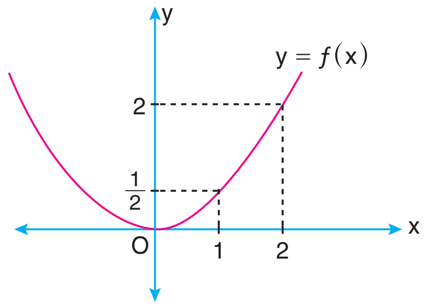
Bir fonksiyonun grafiğinde belirli bir aralıktaki kesenin eğimine fonksiyonun bu aralıktaki ortalama değişim hızı denir.



Ortalama değişim hızı $m = \tan\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ dır.

Örnek

Yanda grafiği verilen $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun $[1,2]$ aralığındaki ortalama değişim hızını bulalım.



Çözüm

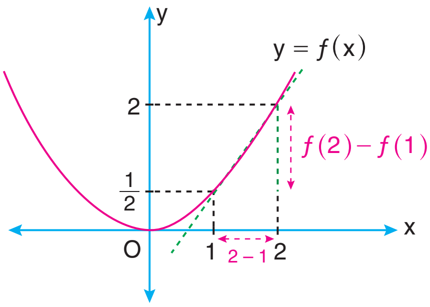
Grafiğe ait tabloyu oluşturalım.

x	0	1	2
$f(x) = y$	0	$\frac{1}{2}$	2

Şekilde $f(1) = \frac{1}{2}$ ve $f(2) = 2$ olduğunu görmekteyiz.

$[a,b] = [1,2]$ aralığındaki ortalama değişim hızı m olsun.

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2} \text{ olur.}$$



Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun $[-1,2]$ aralığındaki ortalama değişim hızını bulalım.

Çözüm

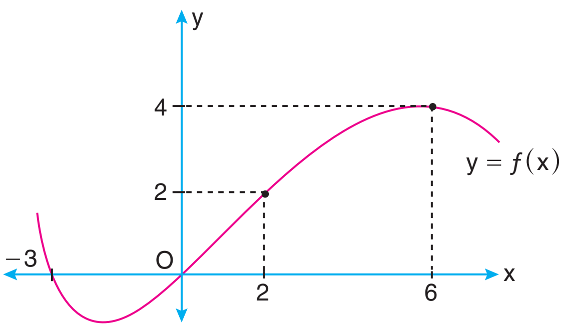
$[a,b] = [-1,2]$ olmak üzere $f(a) = f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$

$f(b) = f(2) = 2^2 - 1 = 3$ tür. Bu durumda ortalama değişim hızı,

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{3 - 0}{2 - (-1)} = \frac{3}{3} = 1 \text{ dir.}$$

Örnek

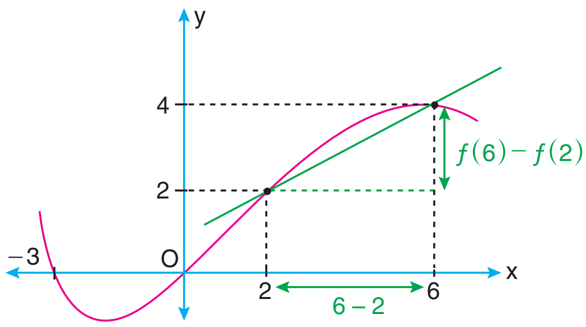
Yanda $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $f(x)$ fonksiyonunun $[2,6]$ aralığındaki ortalama değişim hızını bulalım.



Çözüm

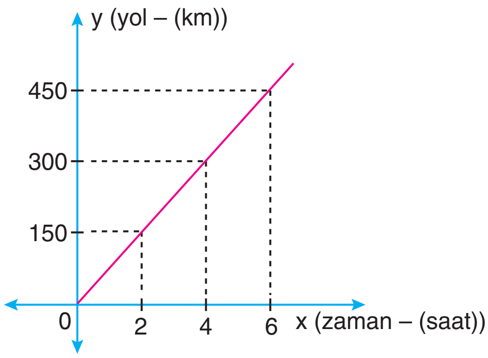
$[a, b] = [2, 6]$ ise fonksiyonun $[2, 6]$ aralığındaki ortalama değişim hızı,

$m = \dfrac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \dfrac{4 - 2}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ olur.



UYGULAYALIM 3-1

1. Yandaki grafik, bir aracın belirli bir sürede doğrusal olarak aldığı yolu göstermektedir. Buna göre



a) Bu aracın aldığı yolu fonksiyon olarak ifade ediniz.

....

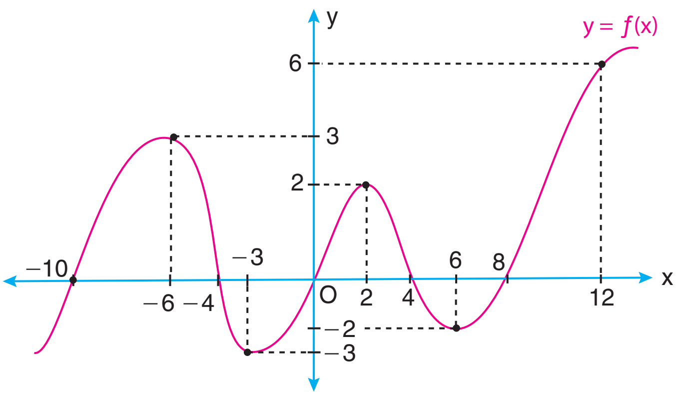
b) Aracın 8. saat sonunda aldığı yol kaç km dir?

....

c) Araç, 375 km yolu kaç saat sonunda almıştır?

....

2. Yanda $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun $[-10, 12]$ aralığındaki pozitif, negatif, artan ve azalan olduğu aralıkları; maksimum ve minimum değerlerini bularak aşağıdaki noktalı yerlere yazınız.



Fonksiyonun pozitif olduğu aralık: ....

Fonksiyonun negatif olduğu aralık: ....

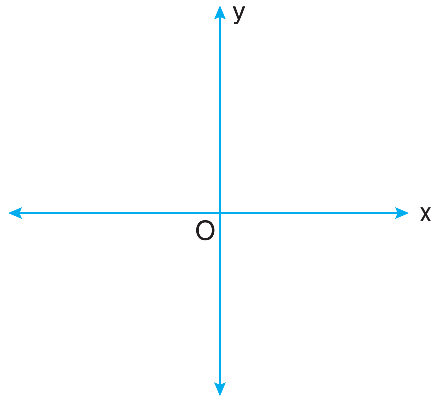
Fonksiyonun artan olduğu aralık: ....

Fonksiyonun azalan olduğu aralık: ....

Fonksiyonun maksimum değeri: ....

Fonksiyonun minimum değeri: ....

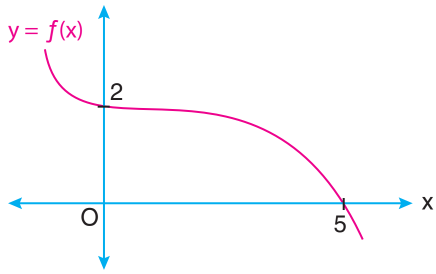
3. Bir ilimizde güncel taksimetre tarifesi açılış ücreti 4,60 TL olup her kilometre için 3,40 TL eklenecek şekilde düzenlenmiştir. Gidilen mesafeye göre ödenecek ücretteki değişimi gösteren fonksiyonun kuralını yazarak elde edilen fonksiyonun grafiğini çiziniz.



4. Yandaki şekilde $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

a) $f(x) \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane x pozitif tam sayısı vardır?

b) $x \cdot f(x) \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane x pozitif tam sayısı vardır?



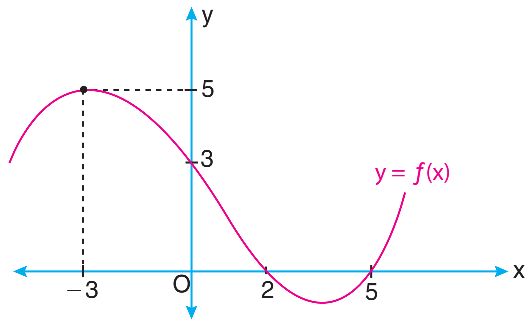
5. $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 1$ forksiyonunun $[0, 2]$ ndaki ortalama değişim hızını bulunuz.

6. Yanda $f(x)$ forksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun,

a) $[-3, 0]$ aralığındaki ortalama değişim hızını bulunuz.

b) $[2, 5]$ aralığındaki ortalama değişim hızını bulunuz.



3.2. İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR VE GRAFİKLERİ

3.2.1. İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyon ve Grafiği

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ biçiminde tanımlanan fonksiyonlara **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonlar** denir.

Bu fonksiyonların grafiklerine **parabol** denir.

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden fonksiyon olmak üzere

1. $x = 0$ için $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ olduğundan grafik y eksenini $(0, c)$ noktasında keser.

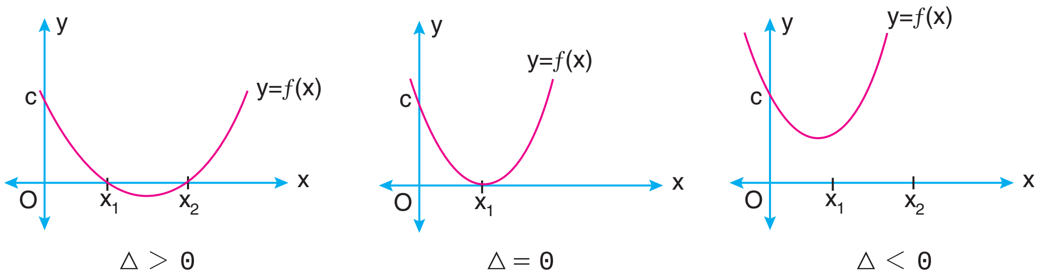
2. $y = 0$ için varsa grafiğin x eksenini kestiği noktalar bulunur.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri, grafiğin x eksenini kestiği noktaların apsisidir. Bu durumda

$\triangle > 0$ ise grafik x eksenini iki farklı noktada keser.

$\triangle = 0$ ise grafik x eksenine teğettir.

$\triangle < 0$ ise grafik x eksenini kesmez.



Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = y = 2x^2 + 3x + 1$ fonksiyonunun varsa y eksenini ve x eksenini kestiği noktaları bulalım.

Çözüm

$y = 2x^2 + 3x + 1$ fonksiyonunda $x = 0$ için grafiğin y eksenini kestiği noktayı bulmuş oluruz.

$x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 = 1$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonun grafiği y eksenini $(0,1)$noktasında keser.

Şimi $f(x)$fonksiyonunun varsa x eksenini kestiği noktaları bulalım.

$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ fonksiyonunda $\triangle = b^2 - 4ac$

$= 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$ olduğundan fonksiyonun farklı iki kökü vardır ve fonksiyonun grafiği x eksenini iki noktada keser.

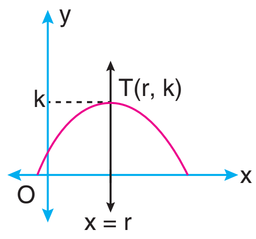
$2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow (2x + 1) \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0$ veya $x + 1 = 0$

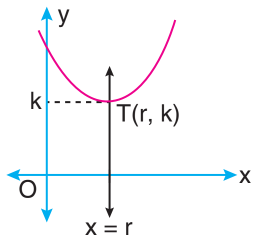
$2x = -1 \qquad x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$

Buna göre grafik x eksenini $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ve $(-1, 0)$ noktalarında keser.

Parabolün tepe noktası, fonksiyonun en büyük veya en küçük değerini aldığı noktadır. r tepe noktasının apsisi, y ordinatı olmak üzere tepe noktası T(r, k) sembolü ile gösterilir. Parabolün kolları $x = r$ doğrusuna göre simetriktir. $x = r$ doğrusu parabolün simetri eksenidir. Grafiğin tepe noktası $T(r, k)$ olmak üzere





x_1 ve x_2 parabolün x eksenini kestiği noktalar ve $x = r$ simetri ekseni olduğuna göre r, x_1 ile x_2 nin orta noktasında yer alır.

$$r = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a} \quad (x_1 \text{ ve } x_2,\ ax^2 + bx + c = 0 \text{ denkleminin kökleri})$$

k, r nin $y = f(x)$ fonksiyonu altındaki görüntüsü olduğundan

$$k = a \cdot r^2 + b \cdot r + c$$

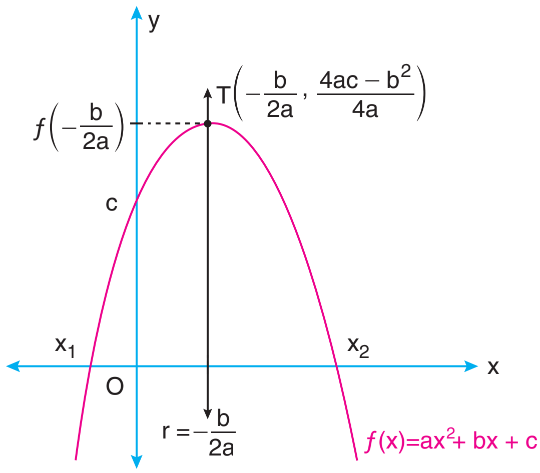
$$= a.\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$= \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ dır.}$$

Buradan fonksiyonun grafiğinin tepe noktası

$$T(r, k) = T(r, f(r)) = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \text{ dır.}$$



Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = y = 3x^2 - 2x - 1$ parabolünün simetri eksenini ve tepe noktasını bulalım.

Çözüm

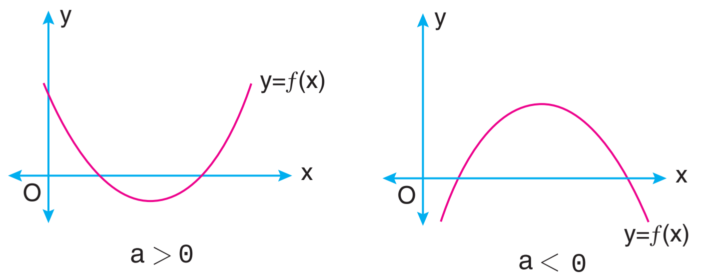
$y = 3x^2 - 2x - 1$ parabolünde $a = 3$, $b = -2$ ve $c = -1$ ise $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$ olduğundan

simetri ekseni $x = \frac{1}{3}$ doğrusudur.

Tepe noktası: $T(r, k) = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 3 \cdot (-1) - (-2)^2}{4 \cdot 3} = \frac{-12 - 4}{12} = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3}$ olduğundan $T(r, k) = T\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ olur.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesinde $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı, $a < 0$ ise parabolün kolları aşağı doğrudur.



Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ parabolünü çizelim.

Çözüm

Parabolün eksenleri kestiği noktalar

$x = 0$ için $y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$ olduğundan $(0, -3)$

$y = 0$ için $x^2 - 2x - 3 = 0$ olduğundan $(x-3) \cdot (x+1) = 0$

$x = 3$ veya $x = -1$ olduğundan $(-1, 0)$ ve $(3, 0)$ dır.

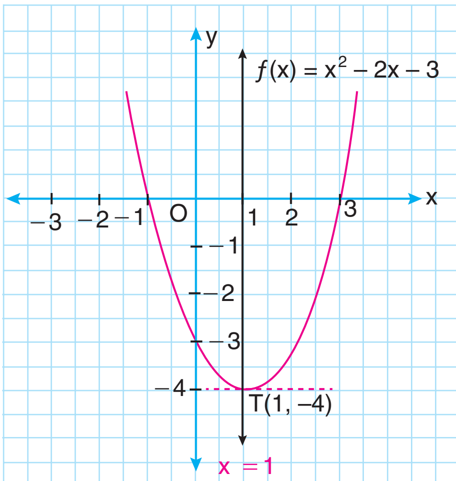
Parabolün tepe noktası

$$T(r, k) = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = T\left(1, \frac{4 \cdot 1 \cdot (-3) - (-2)^2}{4 \cdot 1}\right)$$

$$= T(1, -4) \text{ olur.}$$

$a > 0$ olduğundan grafiğin kolları yukarı doğrudur.

Buna göre $f(x) = x^2 - 2x - 3$ parabolünün grafiği yandaki gibidir.



Grafikten görüldüğü gibi $k = -4$ değeri fonksiyonun en küçük değeridir. Ayrıca $f(x) = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunda x^2li terimin katsayısı $a = 1 > 0$ ve grafiğin kolları yukarıya doğrudur.

Şekildeki parabol $x = 1$ doğrusuna göre simetriktir.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 3x - 2$ parabolünü çizelim.

Çözüm

Parabol,

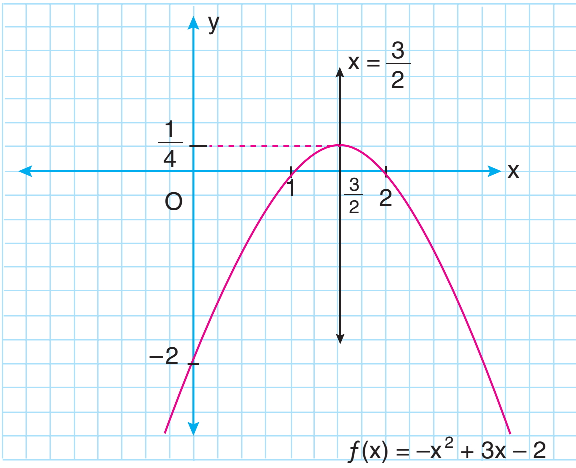
$x = 0$ için $y = -0^2 + 3 \cdot 0 - 2 = -2$ olduğundan $(0, -2)$ noktasında y eksenini,

$y = 0$ için $-x^2 + 3x - 2 = 0$ ise $x^2 - 3x + 2 = 0$ ise $(x-2) \cdot (x-1) = 0$

$x = 2$ veya $x = 1$ ise $(1,0)$ ve $(2,0)$ noktalarında x eksenini keser.

$r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{-2} = \dfrac{3}{2}$ ve $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{4 \cdot (-1) \cdot (-2) - 3^2}{4 \cdot (-1)} = \dfrac{8-9}{-4} = \dfrac{1}{4}$

Parabolün tepe noktası, $T(r,k) = T\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ bulunur.



$f(x) = -x^2 + 3x - 2$ fonksiyonunda x^2li terimin katsayısı $a = -1 < 0$ ve grafiğin kolları aşağıya doğrudur. Ayrıca şekildeki parabol $x = \dfrac{3}{2}$ doğrusuna göre simetriktir.

Fonksiyonun en büyük değeri $\dfrac{1}{4}$ tür.

SONUÇ

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinde $a > 0$ ise grafiğin kolları yukarıya doğru, $a < 0$ ise grafiğin kolları aşağıya doğrudur.

2. $T(r,k)$ tepe noktasında $r = \dfrac{-b}{2a}$ olduğundan $x = -\dfrac{b}{2a}$ doğrusu simetri eksenidir.

3. Fonksiyon, en büyük veya en küçük değerini tepe noktasında alır.

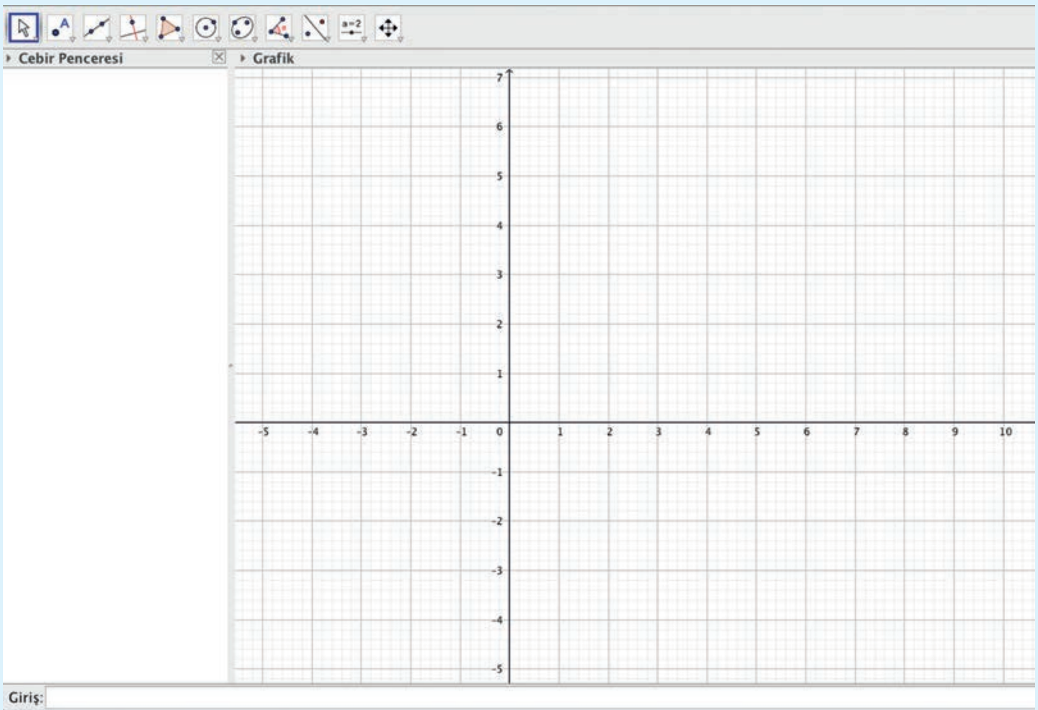
$T(r,k)$ tepe noktası olsun. $a < 0$ ise k, fonksiyonun en büyük değeri; $a > 0$ ise k, fonksiyonun en küçük değeridir.

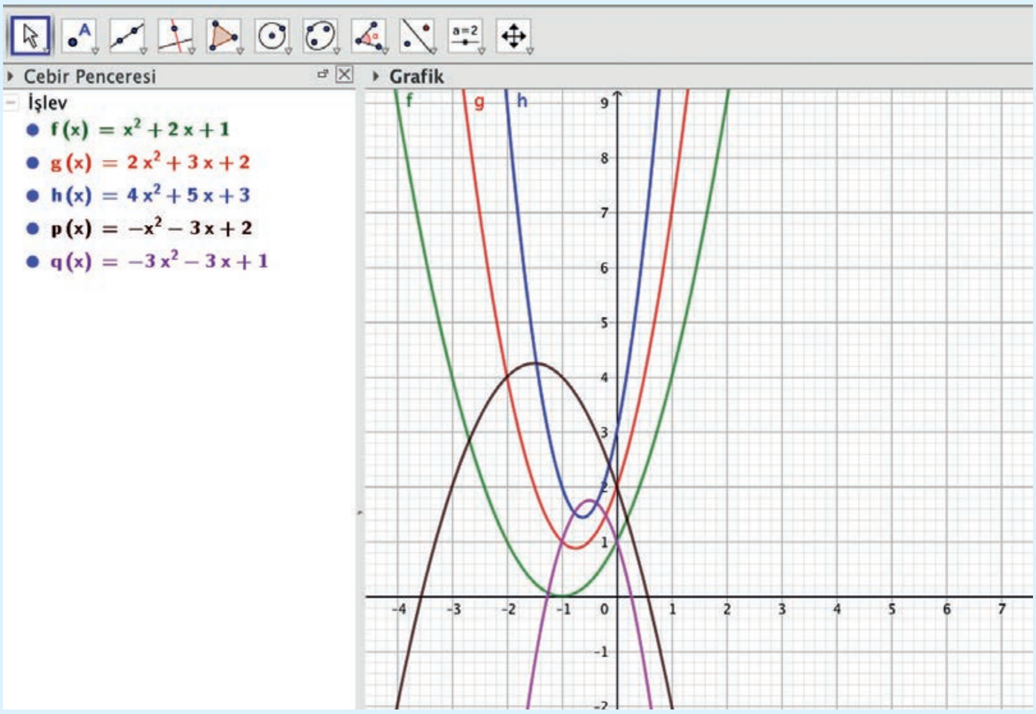
ETKİNLİK

Aşağıdaki tabloda verilen fonksiyonların her biri için boş bırakılan alanları doldurunuz.

Fonksiyon	y eksenini kestiği nokta	x eksenini kestiği nokta	Tepe noktası	Simetri ekseni
$y = x^2 - 4x + 3$				
$y = x^2 + 4x + 3$				
$y = -x^2 + 4x - 4$				
$y = -x^2 - 9$				
$y = 2x^2 - 6x + 9$				

Dinamik Matematik ve Geometri Programından yararlanarak $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 1$, $2x^2 + 3x + 2$, $4x^2 + 5x + 3$, $-x^2 - 3x + 2$, $-3x^2 - 3x + 1$ fonksiyonlarını sırası ile giriş alanına girelim.





Oluşan grafiklerde x^2li terimlerin katsayıları pozitif ise grafiğin kolları yukarı doğru, negatif ise aşağı doğrudur. x^2 li terimlerin katsayısı mutlak değer olarak büyüdükçe parabolün kolları birbirine yaklaşır. x^2nin katsayısı mutlak değer olarak küçüldükçe parabolün kolları birbirinden uzaklaşır.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ y = f(x) = x^2 + 2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

Parabolün eksenleri kestiği noktalar

$x = 0$ için $y = 0^2 + 2 = 2$ ise $(0,2)$ noktasında parabol y eksenini keser.

$\triangle = b^2 - 4ac = 0^2 - 4{\cdot}1{\cdot}2 = -8 < 0$ olduğundan parabol x eksenini kesmez.

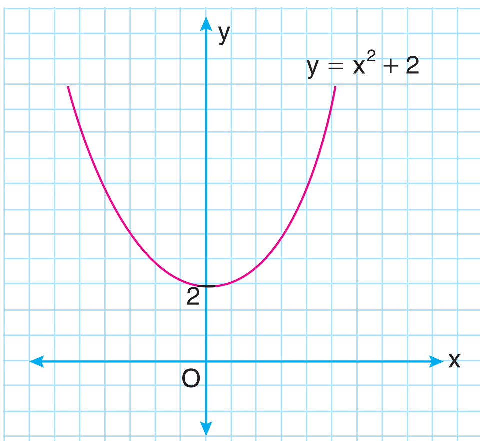
Parabolün tepe noktası,

$$T(r,k) = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = T\left(-\frac{0}{2}, \frac{4{\cdot}1{\cdot}2 - 0^2}{4}\right)$$

$$= T(0,2) \text{ dir.}$$

Ayrıca $y = x^2 + 2$ fonksiyonunda $a = 1 > 0$ olduğundan grafiğin kolları yukarıya doğrudur.

Bu durumda fonksiyonun grafiği yanda verilen şekildeki gibi olur.



Örnek

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 3 \cdot (x-1)^2 + 2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

Parabolün eksenleri kestiği noktalar

$x = 0$ için $y = 3 \cdot (0-1)^2 + 2 = 3 + 2 = 5$ ise $(0,5)$ noktasında y eksenini keser.

$y = 3 \cdot (x-1)^2 + 2 = 3 \cdot (x^2 - 2x + 1) + 2 = 3x^2 - 6x + 5$ ise

$\triangle = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 36 - 60 = -24 < 0$ olduğundan grafik x eksenini kesmez.

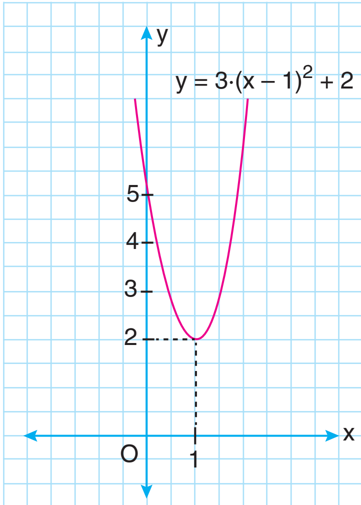
Ayrıca $a = 3 > 0$ olduğundan grafiğin kolları yukarıya doğrudur.

Parabolün tepe noktası,

$$T(r,k) = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

$$= T\left(-\frac{-6}{2 \cdot 3}, \frac{4 \cdot 3 \cdot 5 - (-6)^2}{4.3}\right)$$

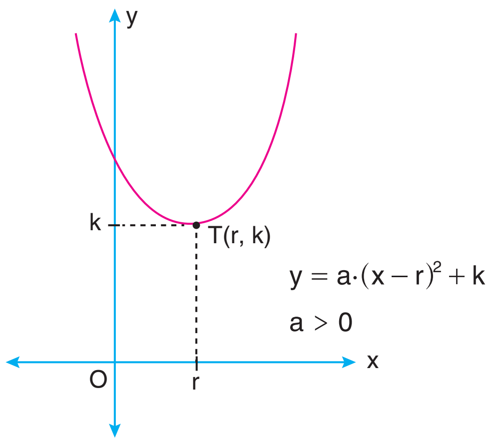
$= T(1,2)$ dır.



$y = 3 \cdot (x-1)^2 + 2$ parabolünün tepe noktası $T(1,2)$ dir.

SONUÇ

$y = a \cdot (x-r)^2 + k$ fonksiyonunun tepe noktası $T(r,k)$ dır.



Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ y = f(x) = -(x-1)^2 + 9$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

Parabolün eksenleri kestiği noktalar;

$x = 0$ için $y = -(0-1)^2 + 9 = -1 + 9 = 8$ ise parabol $(0,8)$ noktasında y eksenini keser.

$y = 0$ için $-(x-1)^2 + 9 = 0$ ise $(x-1)^2 = 9$

$x - 1 = 3$ veya $x - 1 = -3$

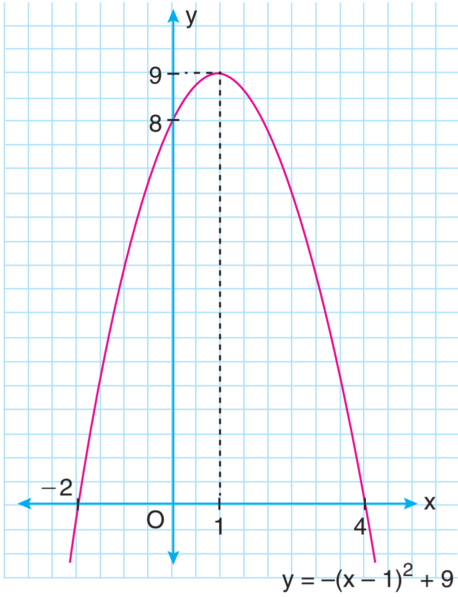
$x = 4$ veya $x = -2$ ise

parabol $(-2,0)$ ve $(4,0)$ noktalarında x eksenini keser.

Ayrıca $a = -1 < 0$ olduğundan grafiğin kolları aşağıya doğrudur.

Parabolün tepe noktası,

$y = -(\underset{r}{x-1})^2 + \underset{k}{9}$ olduğundan $T(r,k) = T(1,9)$ dır.



Bu durumda fonksiyonun grafiği şekildeki gibi olur.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ y = f(x) = x^2 - 2x + 5$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

$y = x^2 - 2x + 5$ ise $y = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4$ ise

$y = (\underset{r}{x-1})^2 + \underset{k}{4}$ olur.

Bu durumda parabolün tepe noktası, $T(r,k) = T(1,4)$ olur.

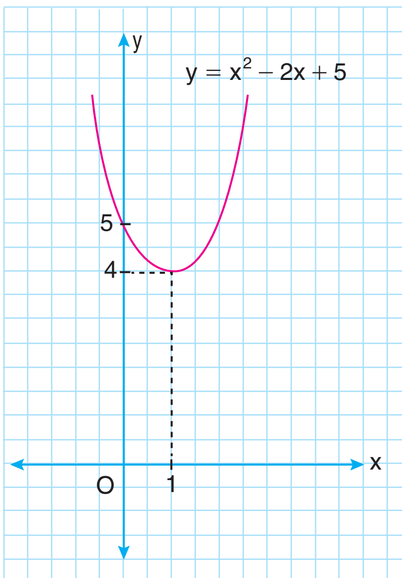
$x = 0$ için $y = 0^2 - 2 \cdot 0 + 5$ ise $y = 5$ olup grafik y eksenini $(0,5)$ noktasında keser.

$y = x^2 - 2x + 5$ ifadesi için $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$

$= 4 - 20$

$= -16 < 0$ olduğundan grafik x eksenini kesmez.

Ayrıca $a = 1 > 0$ olduğundan grafiğin kolları yukarıya doğrudur. Buna göre fonksiyonun grafiği şekildeki gibi olur.



Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = f(x) = 2\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

Parabolün eksenleri kestiği noktalar;

$x = 0$ için $y = 2\cdot(0-1)\cdot(0-3) = 2\cdot(-1)\cdot(-3) = 6$ olduğundan parabol $(0,6)$ noktasında y eksenini keser.

$y = 0$ için $2.(x-1)\cdot(x-3) = 0$ ise $x-1 = 0$ veya $x-3 = 0$
$x = 1$ veya $x = 3$ ise parabol $(1,0)$ ve $(3,0)$ noktalarında x eksenini keser.

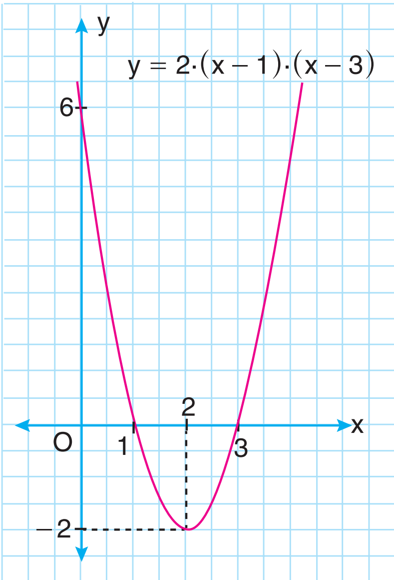
Ayrıca $a = 2 > 0$ olduğundan grafiğin kolları yukarıya doğrudur.

Parabolün tepe noktası,

$y = 2\cdot(x-1)\cdot(x-3) = 2\cdot(x^2-4x+3) = 2x^2-8x+6$ ise

$$T(r,k) = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = T\left(-\frac{-8}{2.2}, \frac{4.2.6-(-8)^2}{4.2}\right)$$
$$= T\left(2, \frac{48-64}{8}\right) = T(2,-2) \text{ dir.}$$

Bu durumda fonksiyonun grafiği yanda verilen şekildeki gibidir.



> $2.(x-1)\cdot(x-3) = 0$ denkleminin kökleri $x = 1$ veya $x = 3$ tür. Bu durumda fonksiyonun grafiği x eksenini bu noktalarda keser.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = f(x) = 2x^2-6x+4$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

Parabolün eksenleri kestiği noktalar;

$x = 0$ için $y = 2\cdot0^2-6\cdot0+4 = 4$ olduğundan parabol $(0,4)$ noktasında y eksenini keser.

$y = 2x^2-6x+4 = 2\cdot(x^2-3x+2) = 2\cdot(x-1)\cdot(x-2)$ ise

$2.(x-1)\cdot(x-2) = 0$ denkleminin kökleri $x = 1$ veya $x = 2$ olduğundan parabol $(1,0)$ ve $(2,0)$ noktalarında x eksenini keser.

Ayrıca $a > 0$ olduğundan grafiğin kolları yukarıya doğrudur.

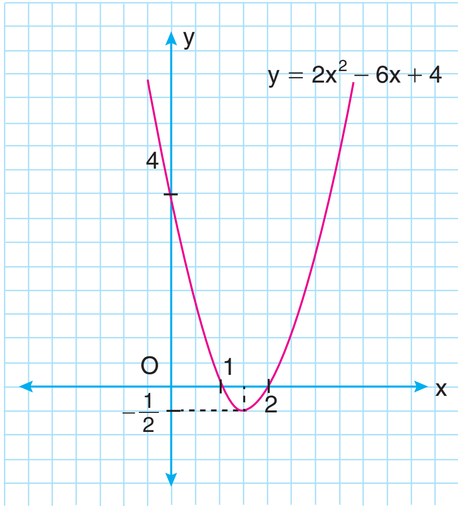
Parabolün tepe noktası,

$$T(r,k) = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

$$= T\left(-\frac{-6}{2\cdot 2}, \frac{4\cdot 2\cdot 4-(-6)^2}{4\cdot 2}\right) \text{ olur.}$$

$$= T\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ olur.}$$

Bu durumda fonksiyonun grafiği yanda verilen şekildeki gibidir.



İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyonun İşareti

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonun işareti x^2nin katsayısı olan a ya ve $\Delta = b^2 - 4ac$ (diskriminant) değerine bağlıdır.

I. $\Delta > 0$ ise farklı iki gerçek kök vardır. Fonksiyonun gerçek (reel) kökleri, aşağıdaki gibi bir işaret tablosu oluşturularak küçük kök solda olacak şekilde yazılır. Değer tablosunun sağ bölgesi $f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesindeki a nın işareti ile aynı olacak şekilde işaretlenir. Sola doğru her kökte işaret değiştirilir.

x	$-\infty$	x_1		x_2		∞
$y = ax^2 + bx + c$	a ile aynı işaretli	0	a ile zıt işaretli	0	a ile aynı işaretli	

(x_1, x_2 fonksiyonun sıfırları)

II. $\Delta = 0$ ise $x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}$ olacak şekilde eşit gerçel (reel) iki kök vardır. Bu köklerden biri işaret tablosunda gösterilerek ayırdığı bölgeler çift çizgi ile gösterilir. Çift kökün sağındaki ve solundaki bölge a nın işareti ile aynı olur.

x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}$		∞
$y = ax^2 + bx + c$	a ile aynı işaretli	0 (çift çizgi)	a ile aynı işaretli	

III. $\Delta < 0$ ise reel kök yoktur. Değer tablosu aşağıdaki gibi olur. Elde edilen bölge a nın işareti ile aynıdır.

x	$-\infty$	∞
$y = ax^2 + bx + c$	a ile aynı işaretli	

Örnek

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x)=x^2-2x-3$ fonksiyonunun alacağı değerlerin işaretini grafik yardımıyla inceleyerek fonksiyonun işaret tablosunu oluşturalım.

Çözüm

$f(x)=x^2-2x-3$ fonksiyonu için $\triangle=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16>0$ olduğundan fonksiyonun farklı iki reel kökü vardır. Bu kökleri bulalım.

$x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x+1)\cdot(x-3)=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=3$ tür.

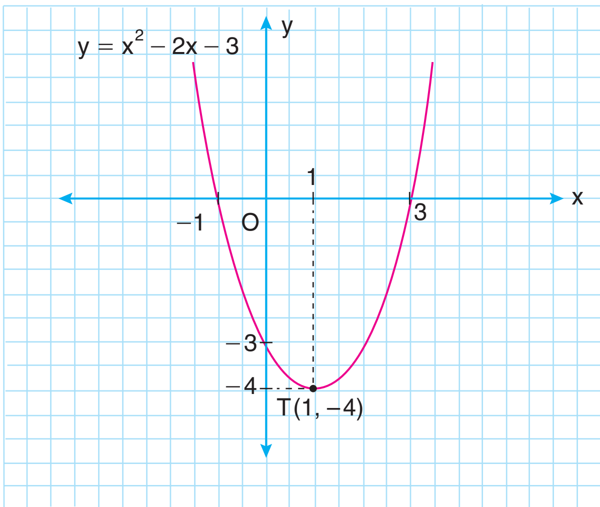
$x=0$ için $f(0)=0^2-2\cdot0-3=-3$

$y=x^2-2x-3$ fonksiyonunun grafiği x eksenini $x_1=-1$ ve $x_2=3$ noktalarında y eksenini $y=-3$ noktasında kesen bir paraboldür.

Bu parabolün tepe noktası,

$T\left(-\dfrac{b}{2a},\ f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)=T(1,-4)$ olur.

Bu durumda fonksiyonun grafiğini çizelim.



x^2 li terimin katsayısı pozitif olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur. Grafikte görüldüğü gibi fonksiyonun $(-\infty,-1)$ ve $(3,\infty)$ aralığında alacağı değerler pozitif, $(-1,3)$ aralığında alacağı değerler negatiftir.

Buna göre işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		-1		3		∞
$y=x^2-2x-3$		+	0	–	0	+	

İşaret tablosuna göre de fonksiyonun $(-\infty,-1)$ ve $(3,\infty)$ nda pozitif (–1,3) nda negatif değer aldığı görülür.

Örnek

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı, $f(x) = x^2 - 2x + 1$ fonksiyonunun alacağı değerlerin işaretini grafik yardımıyla belirleyerek fonksiyonun işaret tablosunu oluşturalım.

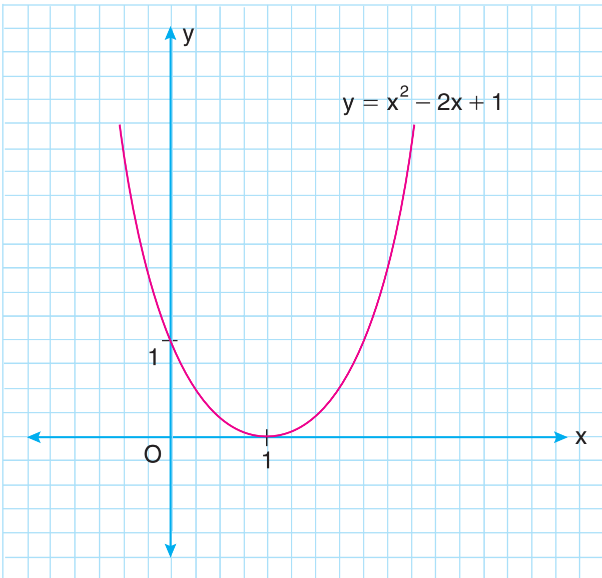
Çözüm

$\triangle = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ olduğundan eşit iki kök vardır.

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$ olduğundan $x_1 = x_2 = 1$ olur.

$x = 0$ için $f(0) = -0^2 - 2x + 1 = 1$ olduğundan grafik y eksenini (0, 1) nda keser.

x^2li terimin katsayısı pozitif olduğundan grafiğin kolları yukarı doğrudur.



Grafikte görüldüğü gibi fonksiyonun aldığı bütün değerler $(1,0)$ noktası hariç pozitiftir. Buna göre işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		1		∞
$y = x^2 - 2x + 1$		$+$	0	$+$	

Örnek

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x) = -x^2 + 7x - 6$ fonksiyonunun grafiğini çizerek işaret tablosunu oluşturalım.

Çözüm

$\triangle = b^2 - 4ac = 7^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-6)$

$= 49 - 24$

$= 25 > 0$ olduğundan farklı iki reel kök vardır.

$-x^2 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$

$(x-1)\cdot(x-6) = 0$

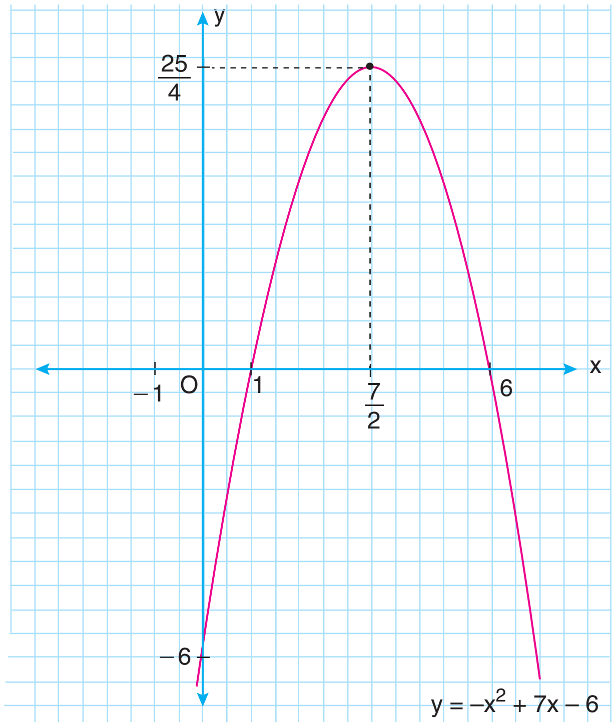
$x_1 = 1,\ x_2 = 6$ olur.

$x = 0$ için $f(0) = -0^2 - 7\cdot 0 - 6 = -6$ olduğundan grafik y eksenini (0, –6) nda keser.

$-x^2$nin katsayısı negatif olduğundan grafiğin kolları aşağı doğrudur.

Tepe noktası: $T\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = T\left(\frac{7}{2}, \frac{25}{4}\right)$

$(-\infty, 1)$ ve $(6, \infty)$ aralığında $f(x)$ negatif, $(1, 6)$ aralığında pozitif değer alır.



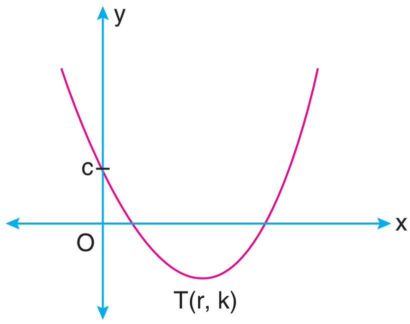
Buna göre işaret tablosu aşağıdaki gibi olur.

x	$-\infty$		1		6		∞
$y = -x^2 + 7x - 6$		–	0	+	0	–	

Bir Parabolün Denkleminin Bulunması

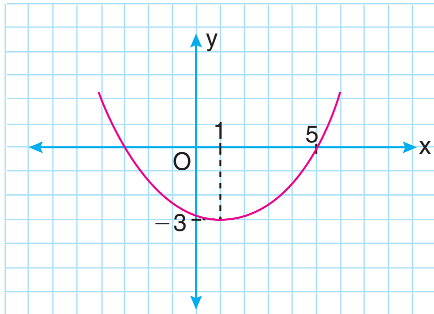
Tepe noktası ile grafiği üzerinde bir noktası verilen parabolün denklemini bulmak için

$y = a \cdot (x - r)^2 + k$ yazılır ve verilen noktadan yararlanılarak a katsayısı bulunur.



Örnek

Yanda grafiği verilen ikinci dereceden fonksiyonun kuralını oluşturalım.



Çözüm

$T(r, k) = T(1, -3)$ olduğundan $r = 1$ ve $k = -3$ tür.

$y = a \cdot (x - r)^2 + k$ ise $y = a \cdot (x - 1)^2 + (-3)$

$y = a \cdot (x - 1)^2 - 3$ bulunur.

Ayrıca grafik $(5, 0)$ noktasından geçtiğinden

$y = a \cdot (x - 1)^2 - 3$ ise $0 = a \cdot (5 - 1)^2 - 3$

$0 = a \cdot 16 - 3$

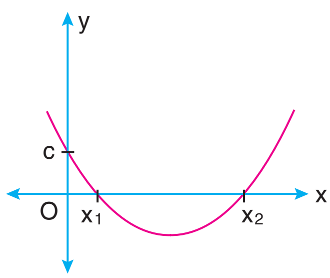
$a = \frac{3}{16}$ olur.

Bu durumda bulduğumuz a değerini ifadede yerine yazarsak $f(x) = \frac{3}{16} \cdot (x - 1)^2 - 3$ fonksiyonunu elde ederiz.

Birisi y eksenini kesmek şartıyla herhangi üç noktadan geçen ikinci dereceden fonksiyon $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ olmak üzere verilen üç nokta yerine yazılarak iki bilinmeyenli iki denklem elde edilir. Bu denklemler ortak çözülerek a ve b değerleri bulunur.

Verilen üç nokta eksenleri kestiği noktalar ise

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ifadesinde, verilen değerler yerine yazılarak a sayısı bulunur.



Örnek

y eksenini $(0,4)$ noktasında kesen ve $(-2,1),(2,1)$ noktalarından geçen ikinci dereceden fonksiyonun kuralını oluşturalım.

Çözüm

$y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda verilen noktaları yazarak a ve b ye bağlı denklemleri elde edelim.

Grafik y eksenini $(0,4)$ noktasında kestiğinden $c = 4$ tür.

$(-2,1)$ için $1 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + 4$

$-3 = 4a - 2b \Rightarrow 4a - 2b = -3$

$(2,1)$ için $1 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + 4$

$-3 = 4a + 2b \Rightarrow 4a + 2b = -3$

$$\begin{aligned} 4a - \cancel{2b} &= -3 \\ 4a + \cancel{2b} &= -3 \\ \hline 8a &= -6 \\ a &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

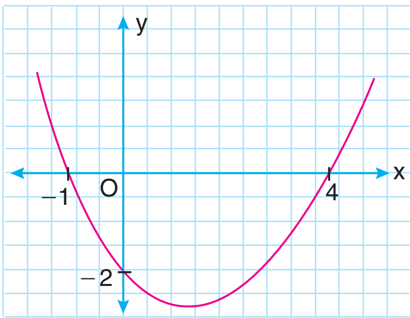
$$\begin{aligned} 4a - 2b = -3 \Rightarrow 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) - 2b &= -3 \\ -3 - 2b &= -3 \\ 2b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

a, b ve c değerlerini $y = ax^2 + bx + c$ ifadesinde yerine yazalım.

$y = -\frac{3}{4}x^2 + 0\cdot x + 4 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x^2 + 4$ olur.

Örnek

Yanda grafiği verilen ikinci dereceden fonksiyonun kuralını oluşturalım.



Çözüm

Grafikte x ve y eksenini kesen noktalar görülmektedir.

$y = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$ olmak üzere,

$y = a\cdot(x - (-1))\cdot(x - 4)$ ise $y = a\cdot(x + 1)\cdot(x - 4)$ elde edilir.

$(0, -2)$ noktası grafiğin üzerinde olduğundan

$(0, -2)$ için $-2 = a\cdot(0 + 1)\cdot(0 - 4)$ ise

$-2 = a\cdot 1\cdot(-4)$

$a = \frac{1}{2}$ elde edilir. Bu durumda $a = \frac{1}{2}$ değeri, $y = a(x + 1).(x - 4)$ ifadesinde yerine yazılırsa

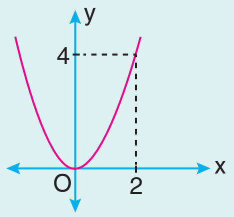
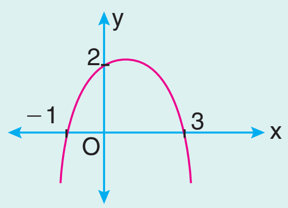
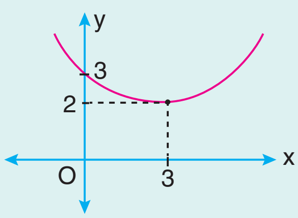
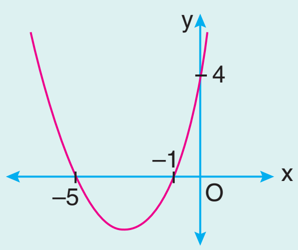
$y = \frac{1}{2}\cdot(x + 1)\cdot(x - 4)$

$y = \frac{1}{2}\cdot(x^2 - 4x + x - 4)$

$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$ fonksiyonu elde edilir.

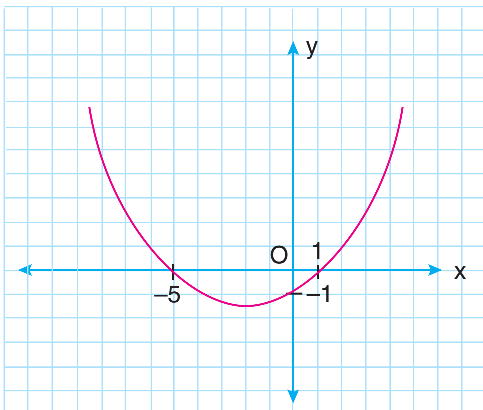
ETKİNLİK

Aşağıdaki tabloda grafikleri verilen fonksiyonların kuralını oluşturalım.

Örnek

Yanda grafiği verilen ikinci dereceden fonksiyonu oluşturalım.



Çözüm

Grafik x eksenini $x_1 = -5$ ve $x_2 = 1$ noktalarında kesmektedir.

$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ ifadesinde $x_1 = -5$ ve $x_2 = 1$ değerlerini yerine yazalım.

$y = a \cdot (x + 5) \cdot (x - 1)$ elde edilir.

Grafik, $(0, -1)$ noktasından geçtiğine göre eşitliği sağlar. Yani,

$-1 = a \cdot (0 + 5) \cdot (0 - 1)$ ise $-1 = -5a$ ise $a = \frac{1}{5}$ olur.

Bu değer eşitlikte yerine yazılırsa

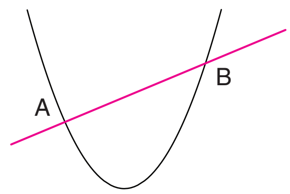
$y = \frac{1}{5} \cdot (x + 5) \cdot (x - 1)$ olduğundan $y = \frac{1}{5} \cdot (x^2 + 4x - 5)$

$y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x - 1$ fonksiyonu elde edilir.

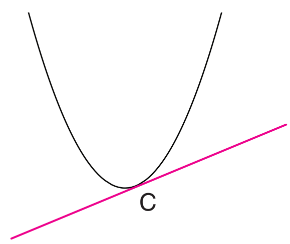
Bir Doğru ile Bir Parabolün Birbirine Göre Durumları

$y = mx + n$ doğrusu ile $y = ax^2 + bx + c$ parabolünün birbirlerine göre durumlarını belirlemek için bu iki denklemin ortak çözümü bulunur. Bu ortak çözüm x ya da y ye bağlı ikinci dereceden denklemi oluşturur.

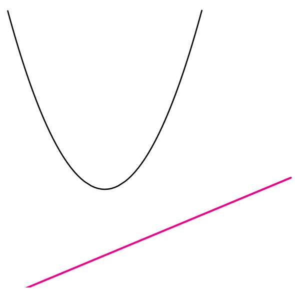
1. $\triangle > 0$ ise doğru ile parabol iki noktada kesişir.



2. $\triangle = 0$ ise doğru, parabole teğettir.



3. $\triangle < 0$ ise doğru, parabolü kesmez.



Örnek

$y = 2x - 1$ doğrusu ile $y = x^2$ parobolünün birbirine göre durumunu belirleyelim.

Çözüm

$y = 2x - 1$ doğrusu ile $y = x^2$ parabolünün ortak çözümünü bulalım.

$y = x^2$ ve $y = 2x - 1$ ise $x^2 = 2x - 1$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

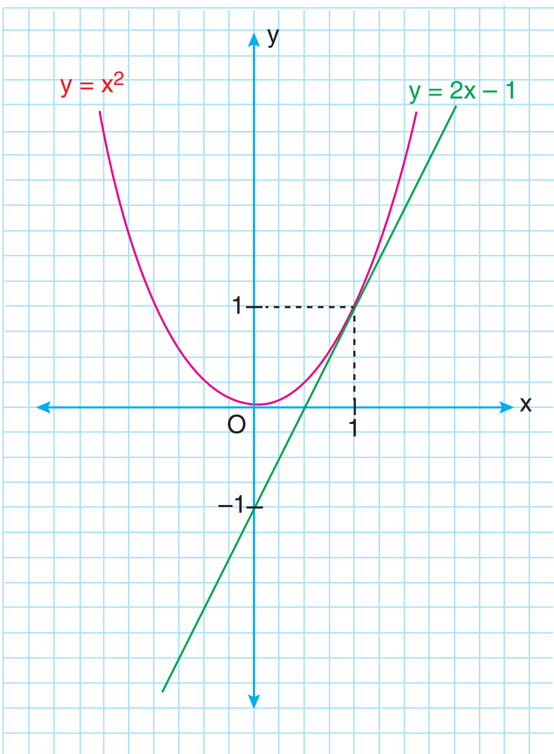
$\triangle = b^2 - 4ac \Rightarrow (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$ olduğundan $y = 2x - 1$ doğrusu $y = x^2$ parabolüne teğettir.

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ ve $x_2 = 1$ dir.

$x_1 = x_2 = 1$ için $y = 2x - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$ olduğundan

$y = 2x - 1$ doğrusunun $y = x^2$ parabolüne teğet olduğu nokta $(1, 1)$ dır.

Bu durumda grafik aşağıdaki gibi olur.



Örnek

$y = 3x - 3$ doğrusu ile $y = x^2 - 1$ parabolünün birbirine göre durumlarını belirleyelim.

Çözüm

$y = 3x - 3$ ve $y = x^2 - 1$ için

$x^2 - 1 = 3x - 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\triangle = b^2 - 4ac \Rightarrow (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$ olduğundan $y = 3x - 3$ doğrusu $y = x^2 - 1$ parabolünü iki noktada keser.

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2) \cdot (x-1) = 0$

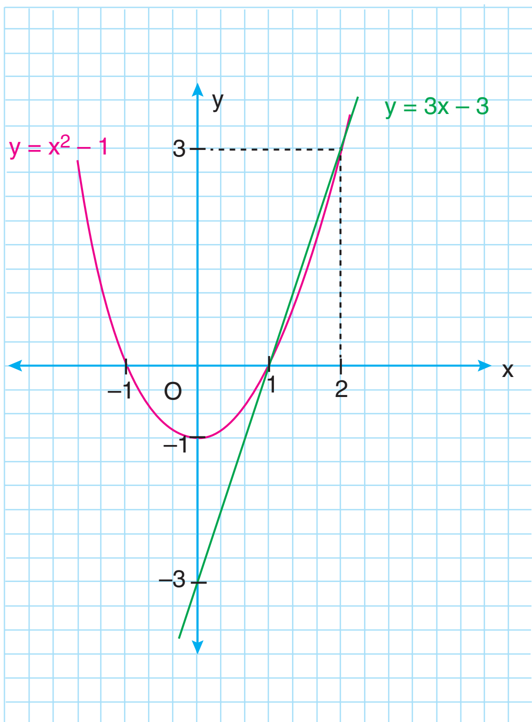
$x - 2 = 0$ veya $x - 1 = 0$

$x = 2$ $\quad\quad$ $x = 1$

$x = 1$ için $y = 3x - 3 = 3 \cdot 1 - 3 = 0$ olup birinci kesim noktası $(1, 0)$ dır.

$x = 2$ için $y = 3x - 3 = 3 \cdot 2 - 3 = 6 - 3 = 3$ olup ikinci kesim noktası $(2, 3)$ dır.

Bu durum aşağıdaki grafikteki gibi olur.



Örnek

$y = m$ doğrusu ile $y = x^2 + mx$ parabolünün kesişmemesi için m nin alabileceği en geniş çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Doğru ile parabolün kesişmemesi için ortak çözüm ile oluşan denklemde $\triangle < 0$ olmalıdır.

$y = x^2 + mx$ ve $y = m$ için $x^2 + mx = m \Rightarrow x^2 + mx - m = 0$

$$\triangle = b^2 - 4ac = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m) < 0$$

$$m^2 + 4m < 0$$

$$m \cdot (m + 4) < 0 \text{ olur.}$$

$m \cdot (m+4) = 0 \Rightarrow m = 0$ veya $m = -4$ noktalarını işaret tablosunda gösterelim.

m	$-\infty$	-4		0		∞
$m(m+4)$	$+$	○	$-$	○	$+$	

m nin çözüm aralığı $Ç = (-4, 0)$ dır.

Örnek

$y = x + 1$ doğrusunun $y = 2px^2$ parabolüne teğet olması için p nin alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

$y = x + 1$ doğrusu ile $y = 2px^2$ parabolünün ortak çözümünden elde edilen denklemi bulalım.

$y = 2px^2$ ve $y = x + 1 \Rightarrow 2px^2 = x + 1$

$$2px^2 - x - 1 = 0$$

Doğrunun parabole teğet olması için bu denklemde $\triangle = 0$ olmalıdır.

$$\triangle = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2p \cdot (-1) = 0$$

$$1 + 8p = 0$$

$$8p = -1$$

$$p = -\frac{1}{8} \text{ olmalıdır.}$$

UYGULAYALIM 3-2

1. Aşağıdaki tabloda verilen fonksiyonların tepe noktalarını ve simetri eksenlerini bularak boş bırakılan yerlere yazınız.

Fonksiyon	Fonksiyonun tepe noktası	Fonksiyonun simetri ekseni
$y = x^2 - 5x + 1$		
$y = -2\cdot(x+1)^2 - 1$		
$y = 4x^2 - 2x$		
$y = -2x^2 + 1$		

2. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $y = x^2$

b) $y = -2\cdot(x+1)^2 - 3$

c) $y = x^2 - 1$

ç) $y = 3\cdot(x-1)^2 - 1$

d) $y = (x-2)^2$

e) $y = x^2 - 2x$

f) $y = x^2 - 2x - 4$

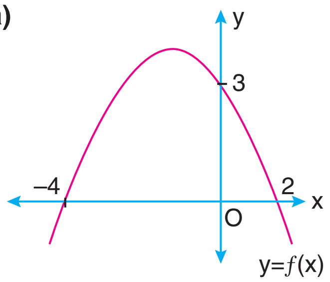
g) $y = 3x^2 - 4x + 2$

3. $y = -3x^2 - 6x + n$ fonksiyonunun en büyük değeri 5 olduğuna göre n kaçtır?

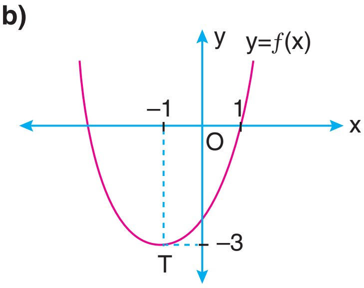
4. $y = x^2 - (m+2)x - 3$ parabolünün simetri ekseni $x = 2$ doğrusu olduğuna göre m kaçtır?

5. Aşağıda, grafikleri verilen ikinci dereceden fonksiyonların kuralını oluşturunuz.

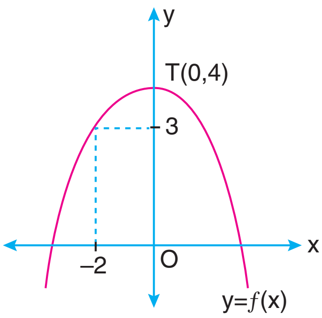
a)



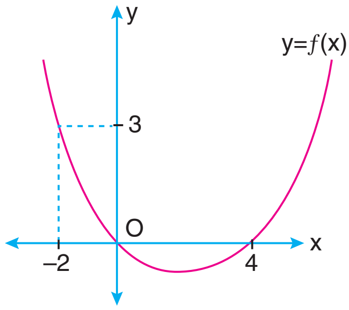
b)



c)



ç)



6. Tepe noktası $T(2,4)$ olan ve $(6,-2)$ noktasından geçen ikinci dereceden fonksiyonun kuralını oluşturunuz.

7. Grafiği y eksenini $(0,6)$ noktasında kesen ve $(3,-2),(6,6)$ noktalarından geçen ikinci dereceden fonksiyonun kuralını oluşturunuz.

8. $y=2x^2-1$ parabolü ile $y=-2x-1$ doğrusunun birbirine göre durumunu inceleyiniz.

9. $y=x^2$ parabolü ile $y=-x-m$ doğrusunun kesişmemesi için m nin alabileceği değer aralığını bulunuz.

3.2.2. İkinci Dereceden Fonksiyonlarla Modellenebilen Problemler

Örnek

Bir mağaza maliyeti x TL olan bir ürünü y TL fiyatla satıyor. x ile y arasındaki ilişki

$y = x^2 - 5x + 12$ şeklinde olduğuna göre mağazanın bu satıştan elde edeceği kâr en az kaç TL dir?

Çözüm

Elde edilen kâr P olsun.

$P = y - x$ olur.

$y = x^2 - 5x + 12 \Rightarrow P = x^2 - 5x + 12 - x$

$P = x^2 - 6x + 12$ olur.

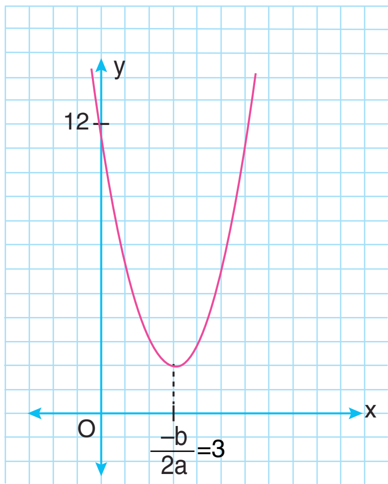
Bu fonksiyonu şekildeki gibi modelleyelim. Elde edilen kârın en az olan değeri sorulduğuna göre $-\frac{b}{2a}$ değerini bulmalıyız.

$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$

$P = x^2 - 6x + 12$ ifadesinde $x = 3$ yazalım.

$P = 3^2 - 6 \cdot 3 + 12$

$= 9 - 18 + 12 = 3$ TL olur.



Örnek

Pazarlama uzmanı, bir ürünün satış fiyatı ile satış miktarı arasındaki ilişkiyi,

$m = -30n + 800$ olarak belirlemiştir. n satış fiyatı, m satılan miktarı göstermektedir.

Eğer ürünün maliyeti 40 TL ise en yüksek kazancı karşılayacak olan satış fiyatı ne kadardır?

Çözüm

Kazancı, $P = f(n) = m \cdot (n - 40)$ fonksiyonu ile ifade edebiliriz.

Buna göre

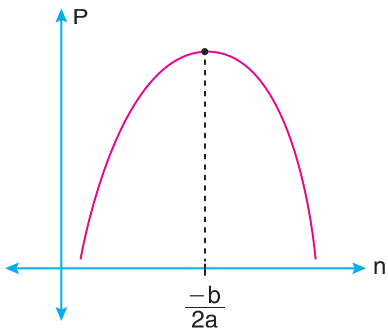
$P = f(n) = m \cdot (n - 40) = (-30n + 800) \cdot (n - 40)$

$= -30n^2 + 1200n + 800n - 32\,000$

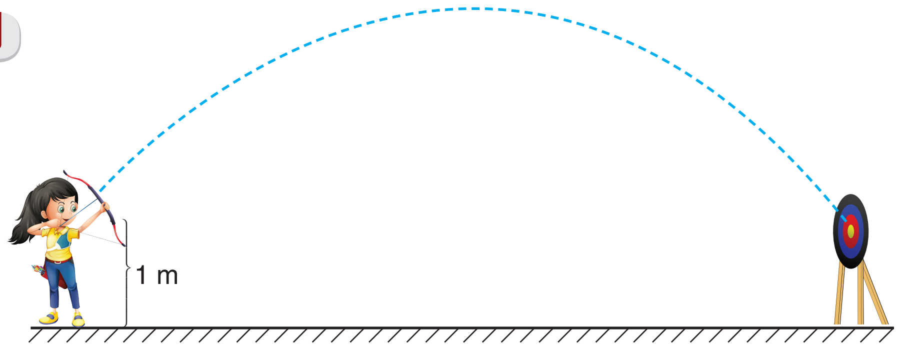
$f(n) = -30n^2 + 2\,000n - 32\,000$

Bu fonksiyonu şekildeki gibi modelleyelim. Parabole göre en yüksek kazancı karşılayacak olan satış fiyatı,

$-\frac{b}{2a} = -\frac{2\,000}{2 \cdot (-30)} = \frac{2\,00\cancel{0}}{6\cancel{0}} = \frac{100}{3}$ TL olur.



Örnek



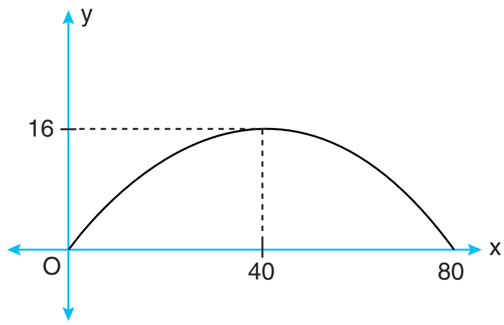
Bir okçu bulunduğu noktada, yerden 1 metre yükseklikte tuttuğu yayla 80 m uzaklıkta bulunan 1 metre yüksekliğindeki hedef tahtasını vuruyor.

Okun ulaştığı en yüksek noktanın yerden yüksekliği 17 metre olduğuna göre, okun izlediği yörüngeyi ikinci dereceden fonksiyonla modelleyelim (Sürtünme katsayısı dikkate alınmayacak.).

Çözüm

Okun izlediği yörüngeyi aşağıdaki grafikte gösterelim. Okun başlangıç noktasını orijin olarak alırsak grafik x eksenini $(80, 0)$ noktasında keser.

Yayın yerden yüksekliğini de dikkate aldığımızda $f(40) = 17 - 1 = 16$ olacaktır.



$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\ &= a \cdot (x - 0) \cdot (x - 80) \\ &= a \cdot x \cdot (x - 80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(40) = 16 \Rightarrow a \cdot 40 \cdot (40 - 80) &= 16 \\ a \cdot 40 \cdot (-40) &= 16 \\ -a \cdot 1600 &= 16 \\ a &= -\frac{16}{1600} = -\frac{1}{100} \end{aligned}$$

Buna göre $f(x) = a \cdot x \cdot (x - 80) = -\frac{1}{100} \cdot x \cdot (x - 80) \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{100}x^2 + \frac{80}{100}x$ olur.

Örnek

Bir yarış arabasının belirli bir sürede (sn.) aldığı mesafe $x(m)$, ilk hızı V_0 (m/sn.), ivmesi a (m/sn^2), zaman t sn. ile gösterilmek üzere x, v_0, t_0 ve a arasında,

$x = V_0 t + \frac{1}{2}at^2$ ilişkisi vardır. Buna göre ilk hızı 40 m/sn. olan bir arabanın ivmesi 2 m/sn^2 olduğuna göre bu araba 1200 metrelik mesafeyi kaç saniyede gider?



Çözüm

$x = V_0 t + \frac{1}{2}at^2$ ise

$\frac{1}{2}at^2 + V_0 t - x = 0$ dır.

$a = 2\ m/sn^2$, $V_0 = 40\ m/sn$ ve $x = 1200\ m$ olduğuna göre

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2 + 40 \cdot t - 1200 = 0$

$t^2 + 40t - 1200 = 0$ dır.

$\Delta = b^2 - 4ac = 40^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1200) = 1600 + 4800 = 6400 > 0$

$t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-40 + \sqrt{6\,400}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-40 + 80}{2} = 20$ sn

$t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-40 - 80}{2} = -60$ sn olur.

$t_2 < 0$ olduğundan yarış arabası 1200 metrelik mesafeyi $t_1 = 20$ saniyede alır.

UYGULAYALIM 3-3

1. Bir mağaza maliyeti x TL olan bir ürünü y TL fiyatla satıyor. x ile y arasındaki ilişki $y = x^2 - 3x + 9$ şeklinde olduğuna göre mağazanın bu satıştan elde edeceği en düşük kârı bulunuz.

2.



Yukarıda bir üst geçidin parabol biçimindeki bir kesiti verilmiştir.

Parabolün denklemi,

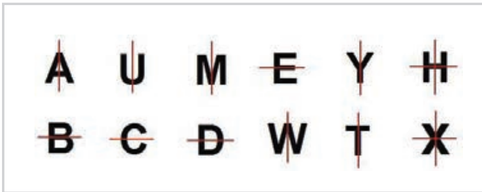
$y = 10x - x^2$

olduğuna göre üst geçidin ayağının en yüksek noktası yoldan kaç metre yüksekliktedir?

3.3. FONKSİYONLARIN DÖNÜŞÜMLERİ





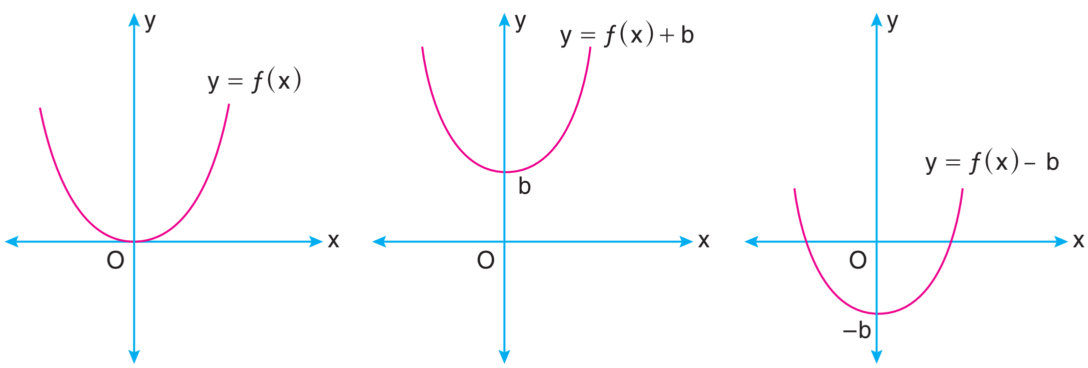


Bu bölümde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiklerini temel alarak, $y = f(x) + b$, $y = f(x - a)$, $y = k \cdot f(x)$, $y = f(k \cdot x)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ dönüşümleri ile elde edilen fonksiyonların grafiklerini inceleyeceğiz.

3.3.1. Bir Fonksiyonun Grafiği ve Dönüşümler

$b > 0$ olmak üzere $y = f(x) + b$ nin grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin, y ekseni boyunca, b kadar yukarı yönde ötelenmesi ile elde edilir.

$y = f(x) - b$ nin grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin, y ekseni boyunca, b kadar aşağı yönde ötelenmesi ile elde edilir.



Örnek

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $y = x$, $y = x + 1$, $y = x - 1$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

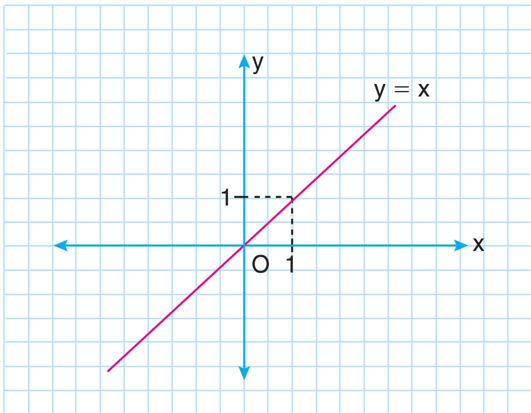
Çözüm

$y = x$ ise

$x = 0$ için $y = 0$ ve

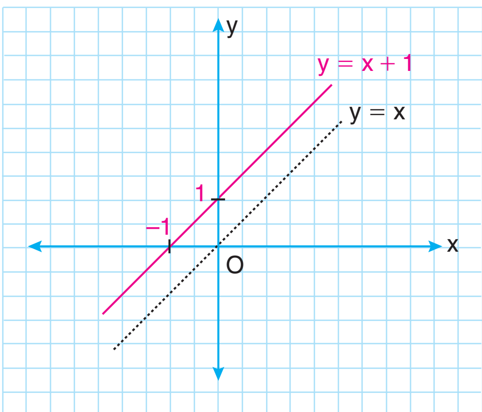
$x = 1$ için $y = 1$ dir. Buna göre

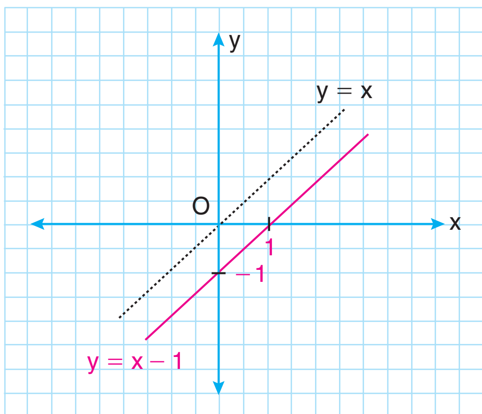
$y = x$ fonksiyonunun grafiği



şeklinde olur.

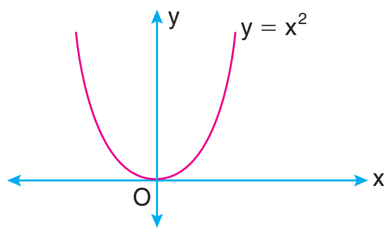
$y = x + 1$ ve $y = x - 1$ fonksiyonlarının grafiklerini ise $y = x$ fonksiyonunun grafiğini y ekseni boyunca, pozitif yönde 1 br ve negatif yönde 1 br kadar öteleyerek elde edebiliriz.





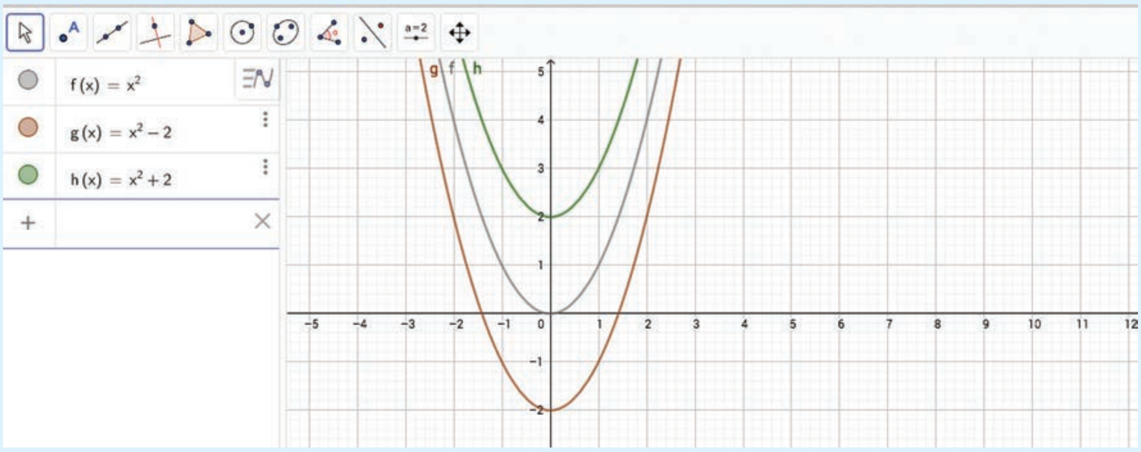
Örnek

Yanda $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y = x^2 - 2$ ve $y = x^2 + 2$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.



Çözüm

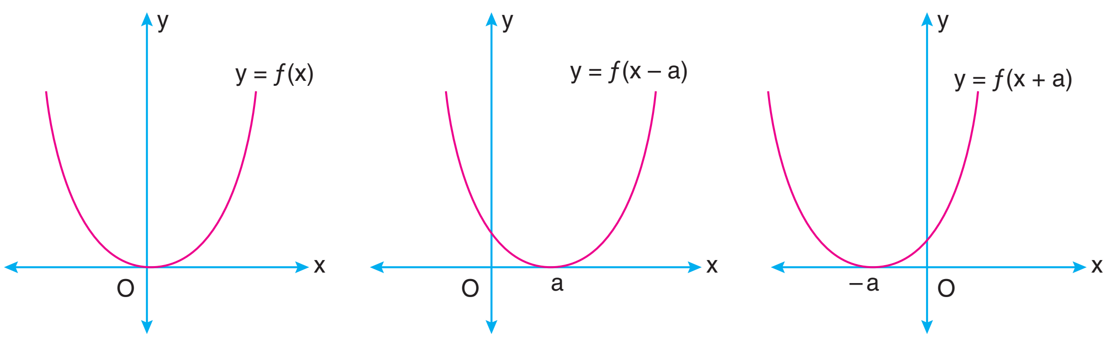
Dinamik Matematik ve Geometri Programını açarak giriş alanına sırası ile x^2 yazıp "Enter" tuşuna basalım. Benzer şekilde giriş alanında açılan yeni satıra $x^2 - 2$ ve $x^2 + 2$ yazarak $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının grafikleri oluşturalım.



$y = x^2$ fonksiyonunun grafiği y ekseni boyunca aşağı doğru 2 br ötelenerek $y = x^2 - 2$ fonksiyonunun grafiği, y ekseni boyunca yukarı doğru 2 br ötelenerek $y = x^2 + 2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

$a > 0$ olmak üzere $y = f(x - a)$ nın grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin, x ekseni boyunca pozitif yönde a br kadar ötelenmesi ile elde edilir.

$y = f(x + a)$ nın grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin, x ekseni boyunca negatif yönde a br kadar ötelenmesi ile elde edilir.

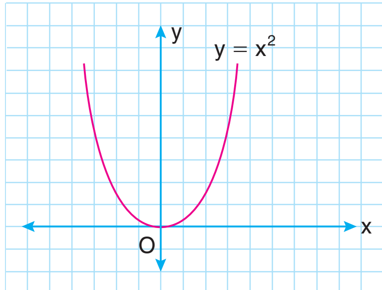


Örnek

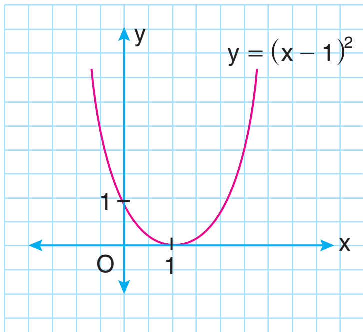
$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $y = (x-1)^2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir.



$y = (x-1)^2$ fonksiyonu $y = f(x-1)$ olduğundan $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğini, x ekseni boyunca pozitif yönde 1 br ötelemeliyiz. Buna göre şekildeki grafik elde edilir.

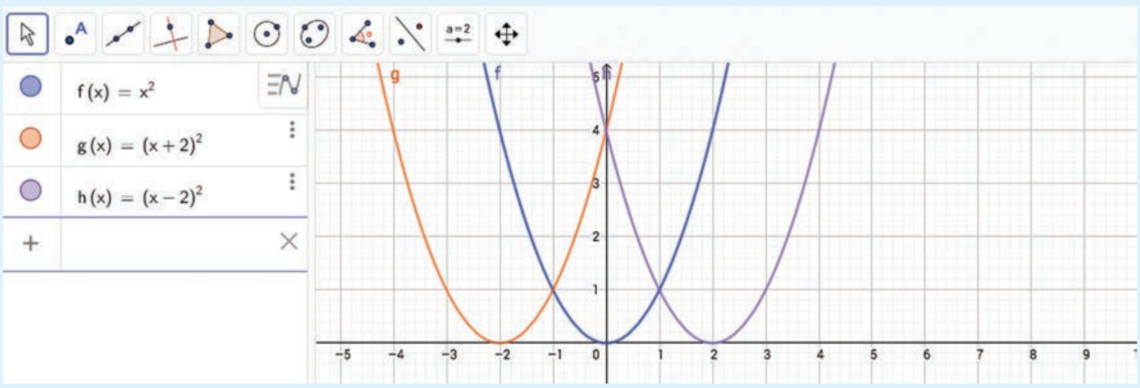


Örnek

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $y = x^2$, $y = (x+2)^2$, $y = (x-2)^2$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı düzlemde gösterelim.

Çözüm

Dinamik Matematik ve Geometri Programını açarak önce $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğini oluşturalım. Ardından sırası ile $y = (x-2)^2$ ve $y = (x-2)^2$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat sisteminde oluşturalım.



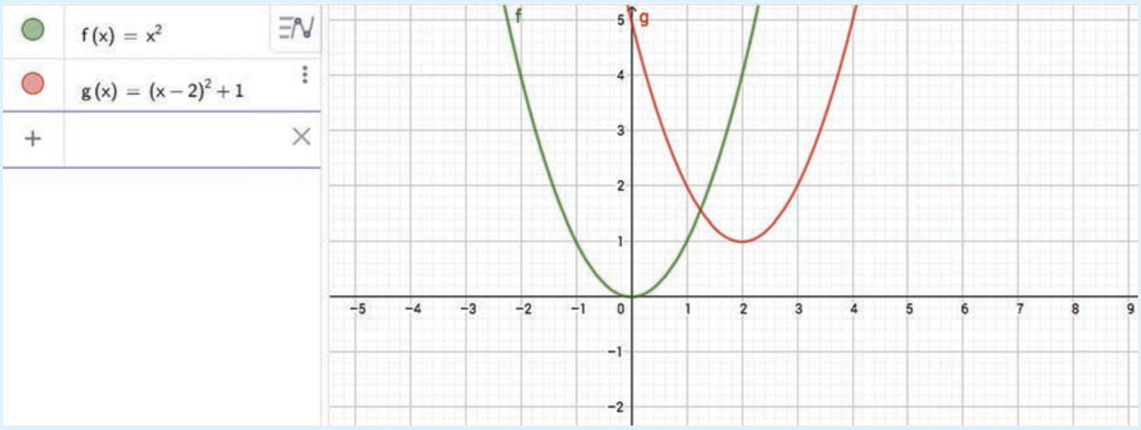
$y = x^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseni boyunca, negatif yönde 2 br ötelenerek $y = (x+2)^2$ fonksiyonunun grafiği, x ekseni boyunca pozitif yönde 2 br ötelenerek $y = (x-2)^2$ fonksiyonunun grafiğinin elde edildiğini görmekteyiz.

Örnek

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $y = x^2$ ve $y = (x-2)^2 + 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

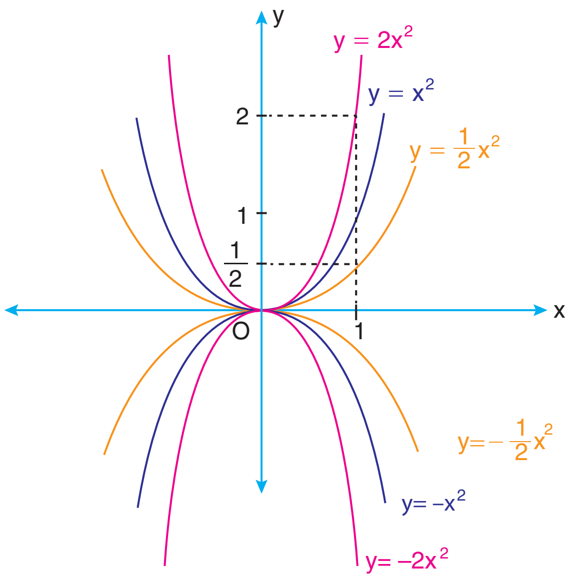
Çözüm

Dinamik Matematik ve Geometri Programını açarak $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğini ardından aynı koordinat sisteminde $y = (x-2)^2 + 1$ fonksiyonun grafiğini oluşturalım.



$f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği, x ekseni boyunca pozitif yönde 2 br ve y ekseni boyunca pozitif yönde 1 br ötelenerek, $y = (x-2)^2 + 1$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

$y = k \cdot f(x)$, $k \in \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiğinde x in belirli değeri için y değeri, $y = f(x)$ fonksiyonuna göre k kat değişmektedir. k nin alacağı değer mutlak değerce arttıkça fonksiyon grafiğinin kolları y eksenine yaklaşacaktır. k nin alacağı değer mutlak değerce azaldıkça fonksiyonun kolları y ekseninden uzaklaşacaktır.

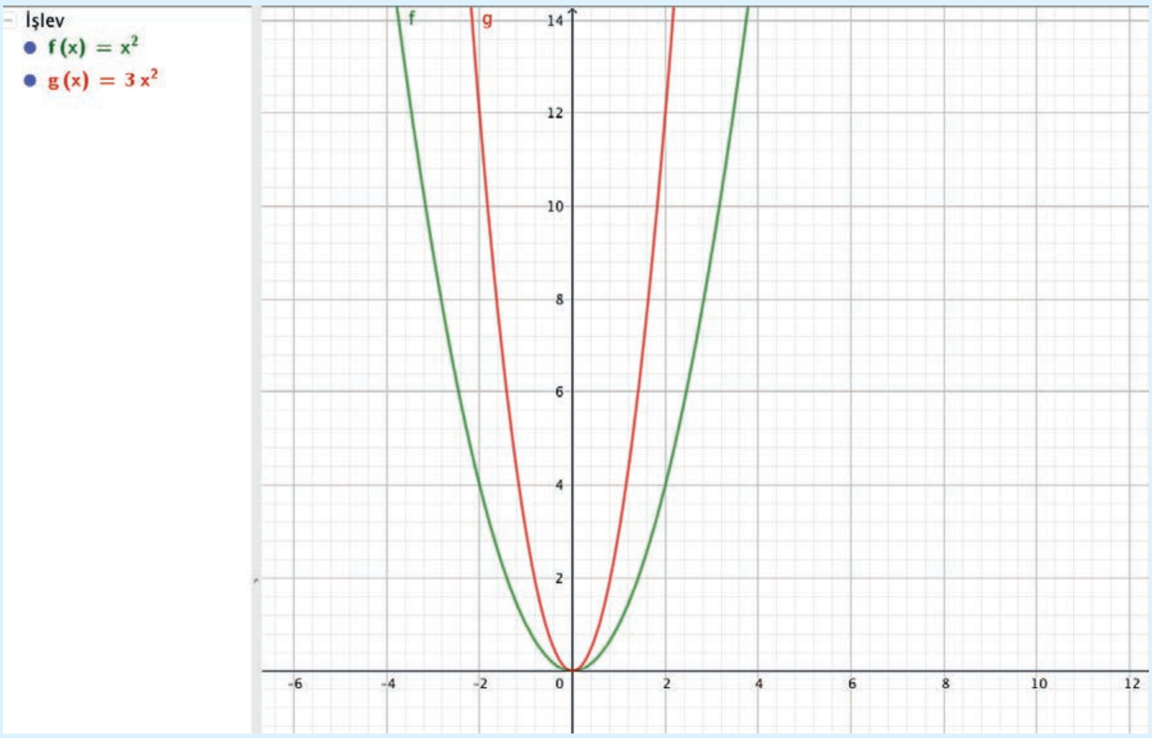


Örnek

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $y = x^2$, $y = 3x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

Dinamik Matematik ve Geometri Programında giriş alanına x^2 yazıp $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğini oluşturalım. Ardından açılan ikinci satıra $3x^2$ yazarak $y = 3x^2$ fonksiyonunun grafiğin oluşturalım.



$y = x^2$ fonksiyonunun grafiğinin kolları y eksenine yaklaştırılarak $y = 3x^2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

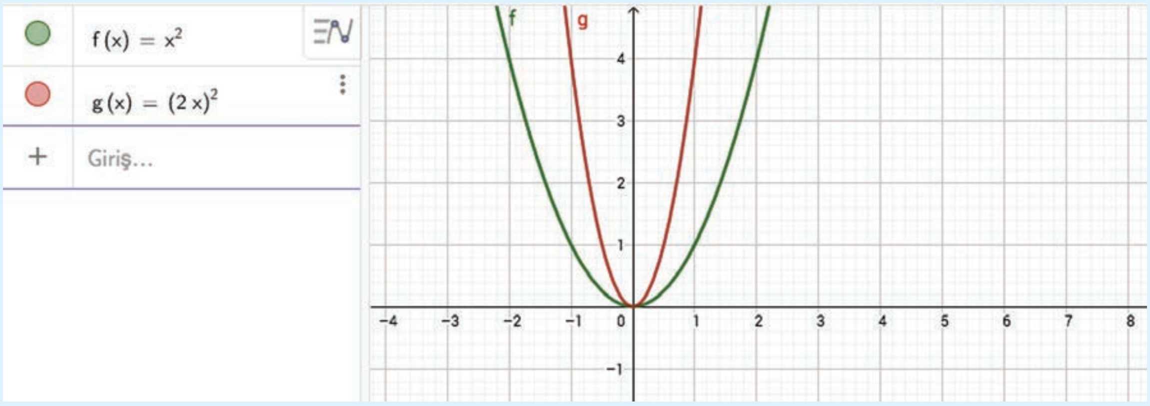
$f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{Z})$ olmak üzere $y = f(kx) = (kx)^n = k^n x^n$ ise $y = k^n \cdot f(x)$ olduğundan $y = f(kx)$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için yukarıdaki eşitlik yazıldıktan sonra çizim yapılır.

Örnek

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $y = x^2$, $y = (2x)^2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

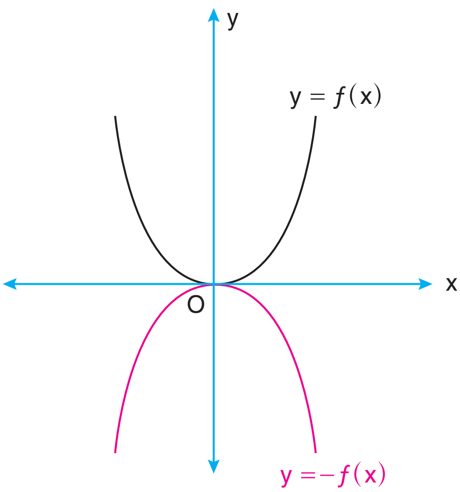
Çözüm

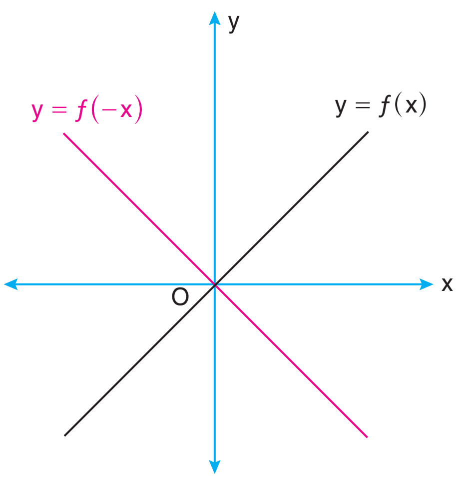
Dinamik Matematik ve Geometri Programında giriş alanına x^2 yazarak $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğini oluşturalım. Ardından giriş alanında açılan yeni satıra $(2x)^2$ yazarak $y = (2x)^2$ fonksiyonunun grafiğini oluşturalım.



$y = (2x)^2 = 4x^2$ fonksiyonunun grafiğinin kollarının y eksenine, $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğine göre daha yakın olduğunu görmekteyiz.

$y = -f(x)$ ile $y = f(x)$ fonksiyonlarının grafikleri x eksenine, $y = f(-x)$ ile $y = f(x)$ fonksiyonlarının grafikleri y eksenine göre simetriktir.



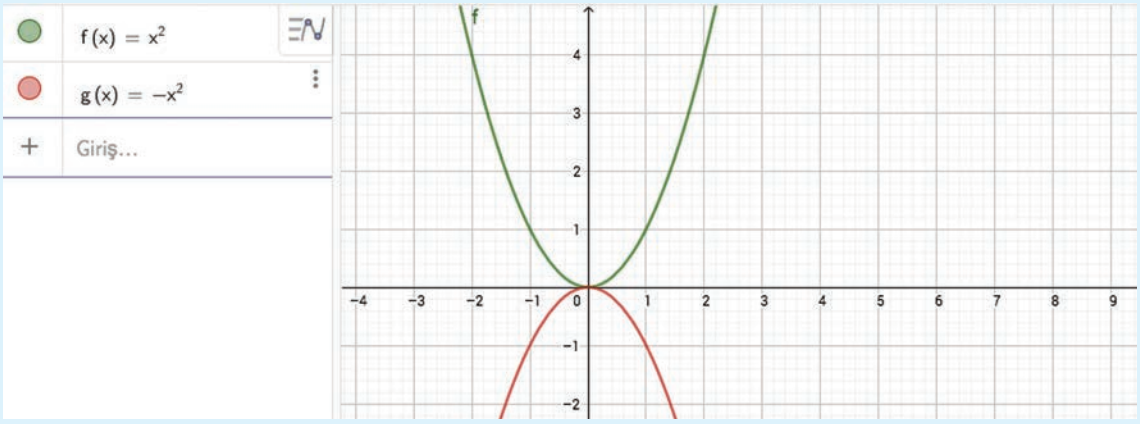


Örnek

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $y = x^2$, $y = -x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

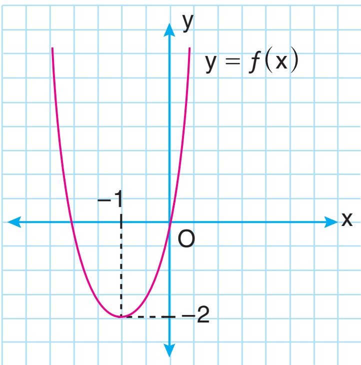
Dinamik Matematik ve Geometri Programında $y = x^2$ fonksiyonunun ardından aynı koordinat sisteminde $y = -x^2$ fonksiyonunu oluşturalım.



$y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğini temel alırsak $y = -x^2$ fonksiyonunun grafiği, $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriğidir.

Örnek

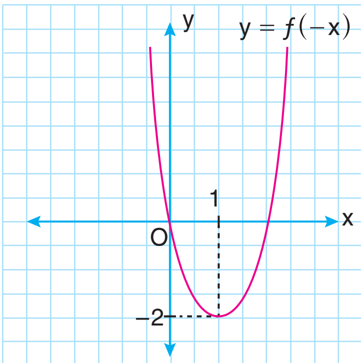
Yanda $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y = f(-x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.



Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunun y eksenine göre simetriğini çizmeliyiz.

Buna göre $y = f(-x)$ fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir.



$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.

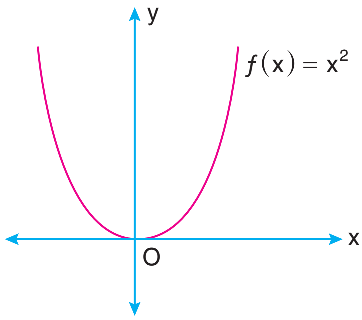
Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonu tek fonksiyondur.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = f(x)$ ise f fonksiyonu çift fonksiyondur.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun tek veya çift fonksiyon olup olmadığını belirleyerek grafiğini inceleyelim.

Çözüm



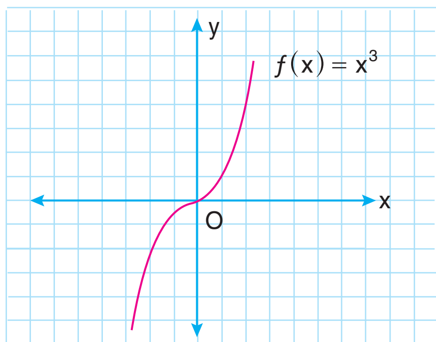
$f(x) = x^2$ ise $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ olup $f(-x) = f(x)$ olduğundan $f(x) = x^2$ çift fonksiyondur.

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetriktir.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ fonksiyonunun tek veya çift olup olmadığını belirleyip grafiğini inceleyelim.

Çözüm



$f(x) = x^3$ ise $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ olup $f(-x) = -f(x)$ olduğundan $f(x) = x^3$ tek fonksiyondur.

$f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir.

Örnek

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$ fonksiyonunun tek veya çift olup olmadığını belirleyelim.

Çözüm

$f(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow f(-x) = (-x)^2 - (-x) + 1 = x^2 + x + 1$ olduğundan

$f(-x) \neq f(x)$ ve $f(-x) \neq -f(x)$ olup $f(x)$ fonksiyonu çift ya da tek değildir.

Çift fonksiyonların grafiği y eksenine göre, tek fonksiyonların grafiği ise orijine göre simetriktir.

Bir fonksiyon tek ya da çift fonksiyon olmayabilir.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir. Buna göre

$f(x)+x.f(-x)=x^4-x^3+x^2-x+1$ ise $f(2)$ kaçtır?

Çözüm

$f(x)$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik ise $f(x)$ tek fonksiyon ve $f(-x)=-f(x)$ tir.

$$f(x)+x\cdot f(-x)=x^4-x^3+x^2-x+1$$

$$f(x)-x\cdot f(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$$

$$f(2)-2\cdot f(2)=2^4-2^3+2^2-2+1$$

$$-f(2)=16-8+4-1$$

$$-f(2)=11$$

$f(2)=-11$ dir.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=(a-2)x^4+4x^3+(b+1)x^2+x+c-2$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik ise $a+b+c$ kaçtır?

Çözüm

Orijine göre simetrik olan fonksiyon tek fonksiyon olup $f(-x)=-f(x)$ tir. Çift dereceli terimler bu şartı sağlamaz.

$$f(x)=\underbrace{(a-2)}_{=0}x^4+4x^3+\underbrace{(b+1)}_{=0}x^2+x+\underbrace{c-2}_{=0}$$

$a-2=0 \Rightarrow a=2$ $\quad$ $b+1=0 \Rightarrow b=-1$ $\quad$ $c-2=0 \Rightarrow c=2$

$a+b+c=2+(-1)+2=3$ olur.

Örnek

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetriktir. Buna göre

$f(x)=(a+1)x^3+(b-1)x^2-(b+2)x+1$ ise $f(a\cdot b)$ değerini bulalım.

Çözüm

$f(x)$, y eksenine göre simetrik olduğundan çift fonksiyondur. Bu durumda $f(-x)=f(x)$ tir. Tek dereceli terimler bu şartı sağlamadığından tek dereceli terimlerin katsayıları sıfır olmalıdır. Buna göre

$a+1=0$ ise $a=-1$

$b+2=0$ ise $b=-2$ ve $f(a\cdot b)=f((-1).(-2))$

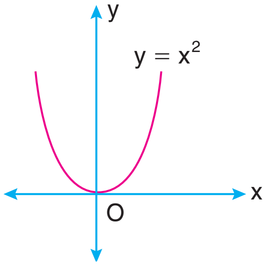
$=f(2)$ olur.

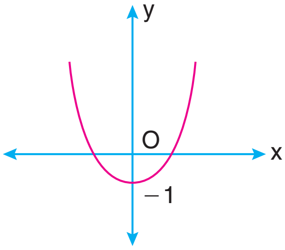
$$f(x)=(a+1)x^3+(b-1)x^2-(b+2)x+1$$

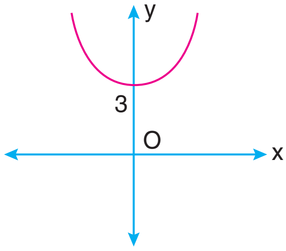
$f(2)=(-2-1)2^2+1=(-2-1)\cdot 4+1=-11$ olur.

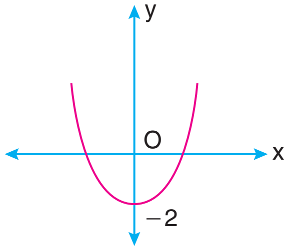
UYGULAYALIM 3-4

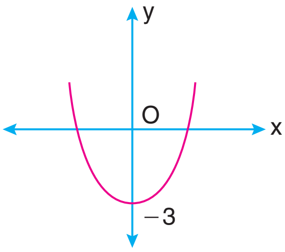
1. Yanda $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y = x^2 - 3$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

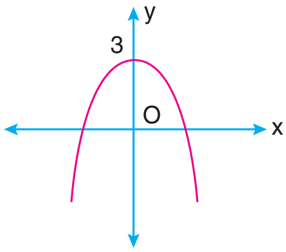


A)


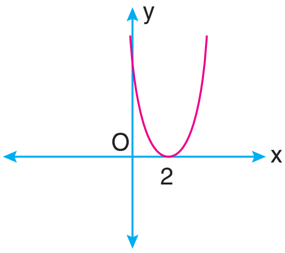
B)


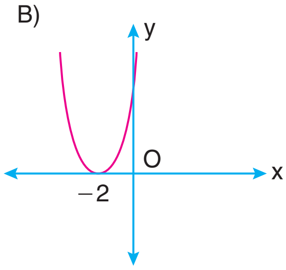
C)


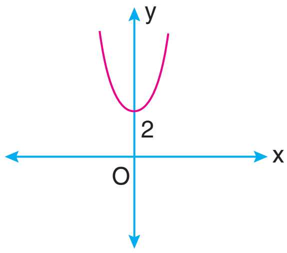
D)


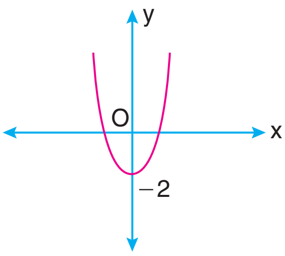
E)


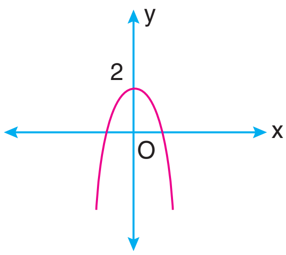
2. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = (x-2)^2$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A)


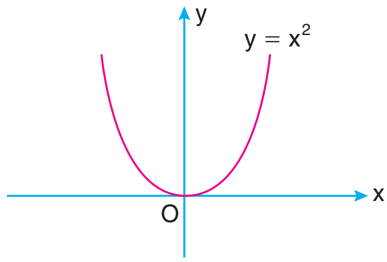
B)


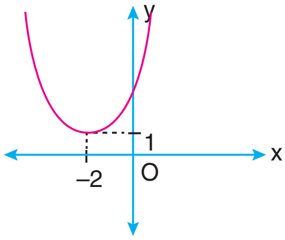
C)


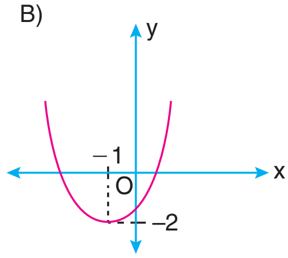
D)


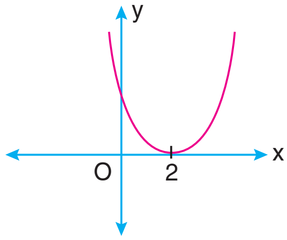
E)


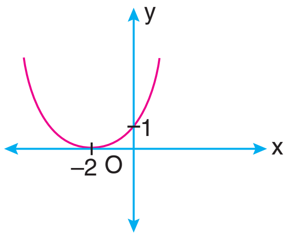
3. Yanda $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $y = (x+2)^2 - 1$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

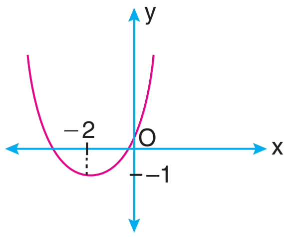


A)


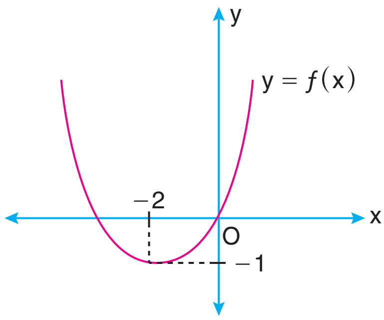
B)


C)


D)


E)


4. Yanda $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.



a) $y = f(x) + 1$

b) $y = f(x+1)$

c) $y = f(x+1) - 1$

ç) $y = f(x+1) + 1$

d) $y = -f(x)$

e) $y = -f(x) + 1$

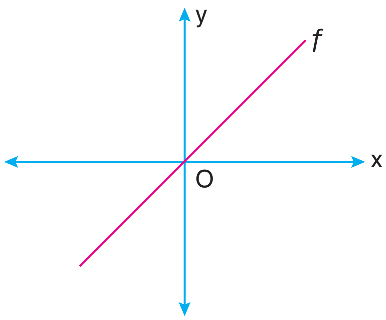
f) $y = f(-x)$

g) $y = f(-x) + 1$

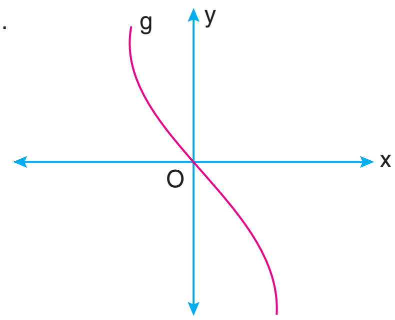
5. $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir.

$f(x) = (a-1)x^4 + 2x^3 - (b+2)x^2 + 2x$ olduğuna göre $a + b$ kaçtır?

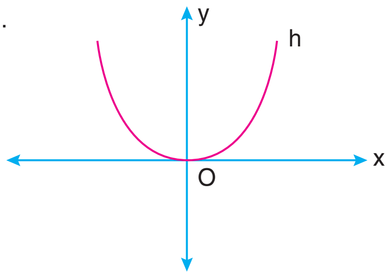
6. I.



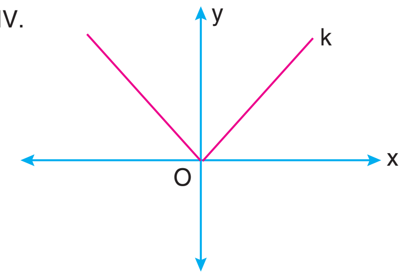
II.



III.



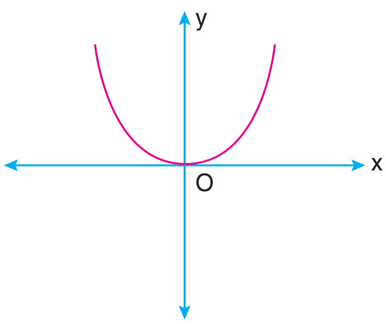
IV.



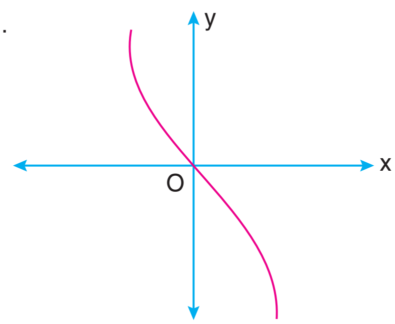
Yukarıda grafiği verilen fonksiyonlardan kaç tanesi tek fonksiyondur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

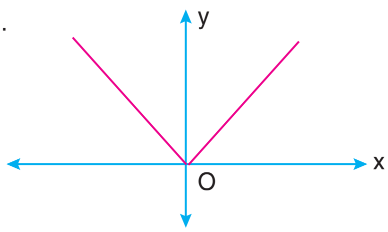
7. I.



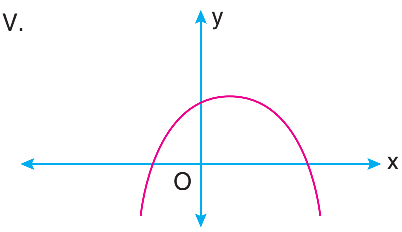
II.



III.



IV.



Yukarıda grafiği verilen fonksiyonlardan kaç tanesi çift fonksiyondur?

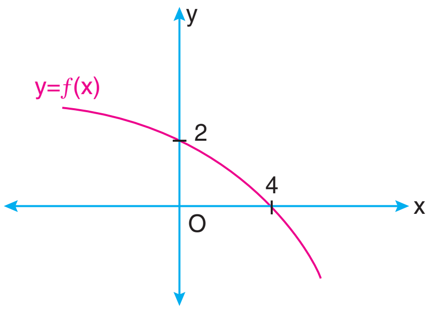
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetriktir.

$f(x) = (a-2)x^3 + (a-1)x^2 + (b-3)x + b + 2$ olduğuna göre $a + b$ kaçtır?

3. DEĞERLENDİRME SORULARI

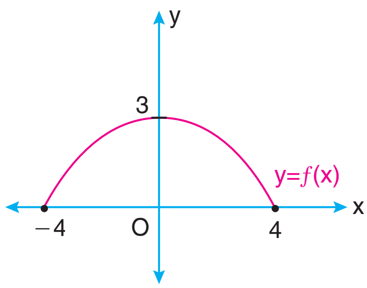
1. Şekilde grafiği verilen $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?



A) $f(2) > 0$ B) $f(5) < 0$ C) $f(0) = 2$

D) $f(4) = 0$ E) $f(-1) < 0$

2. Yanda $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.



☐ $f(3) > 0$ dır.

☐ $f(-2) < 0$ dır.

☐ $f(x)$ fonksiyonu $[0, 4]$ aralığında azalandır.

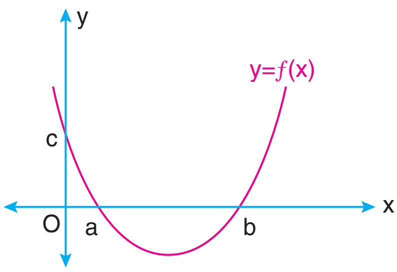
☐ $f(x)$ fonksiyonu $[-4, 0]$ aralığında artandır.

☐ $(0, 4]$ aralığında $x \cdot f(x) < 0$ dır.

☐ $f(x)$ çift fonksiyondur.

☐ $f(x)$ fonksiyonunun maksimum değeri 2 dir.

3. Yanda $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdaki ifadelerden hangisi <u>yanlıştır</u>?



A) $f(a) = f(b)$

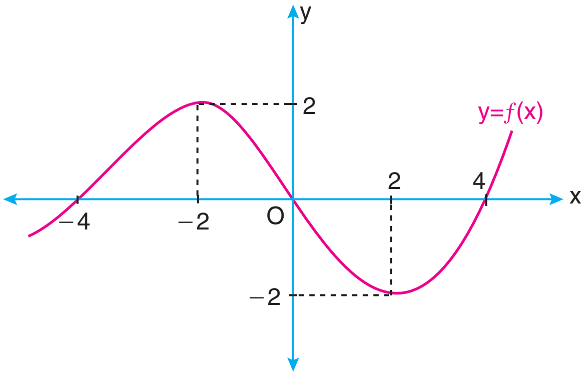
B) $a < x < b$ için $f(x) < 0$

C) $x > b$ için $f(x) > 0$

D) $(f o f)(a) = c$

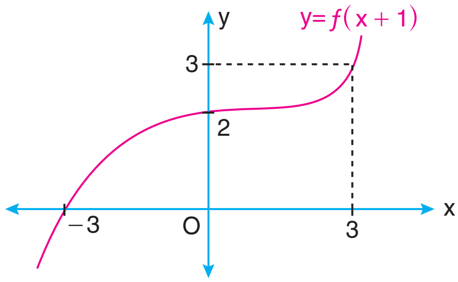
E) $(f o f)(b) = a$

4. Yandaki $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre $f(x) > 0$ ve $x < 6$ eşitsizlik sistemini sağlayan x tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?



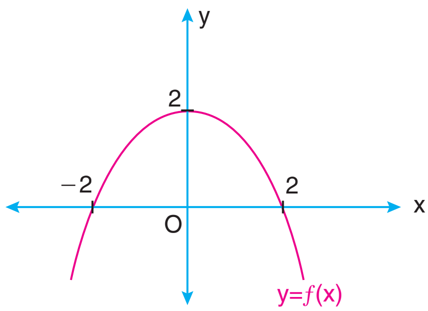
A) −1
B) 0
C) 1
D) 2
E) 3

5. Yandaki şekilde $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = f(x+1)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $\dfrac{f(-2)+f(4)}{f(1)}$ kaçtır?

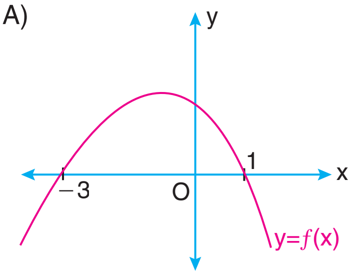


A) $\frac{1}{2}$
B) 0
C) 1
D) $\frac{3}{2}$
E) 2

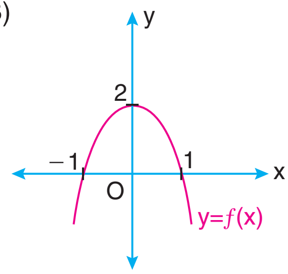
6. Yanda $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f(x-1)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



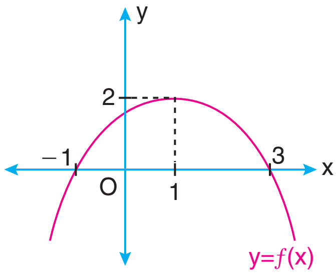
A)



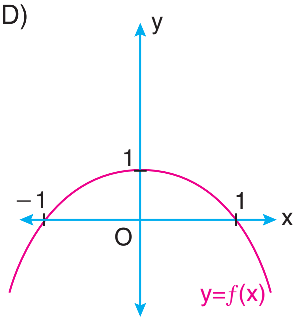
B)



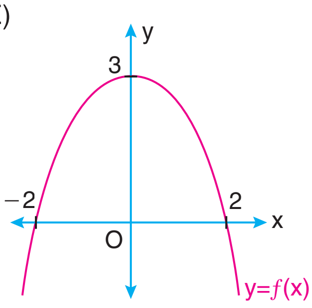
C)



D)



E)



7. Simetri ekseni $x = 4$ doğrusu olan $y = x^2 - (k-2)x + 2k + 1$ parabolünün y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?

A) 15 B) 18 C) 21 D) 24 E) 25

8. $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 5x + 8$ fonksiyonunun grafiği için aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) Kolları yukarıya doğrudur.

B) y eksenini $(0,8)$ noktasında keser.

C) Simetri ekseni $x = \frac{5}{4}$ doğrusudur.

D) x eksenini iki noktada keser.

E) Tepe noktası $\left(\frac{5}{4}, \frac{39}{8}\right)$ noktasıdır.

9. Aşağıda denklemleri verilen parabollerden hangisi x eksenini <u>kesmez</u>?

A) $y = x^2 + 6x + 5$ B) $y = x^2 - x + 4$ C) $y = -x^2 + 2x + 3$

D) $y = x^2 - 4x + 3$ E) $y = x^2 - 3x - 10$

10. $y = x^2 - 6x + 1$ parabolünün tepe noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3,8)$ B) $(3,8)$ C) $(3,-8)$ D) $(-3,-8)$ E) $\left(3,\frac{1}{3}\right)$

11. $y = x^2 - (m+2)x + 1$ parabolünün tepe noktasının apsisi 2 olduğuna göre m kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. $y = 3x^2 - 9x + 5$ parabolünün simetri ekseni aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x = 1$ B) $x = -\frac{3}{2}$ C) $x = 2$ D) $x = \frac{3}{2}$ E) $x = \frac{5}{2}$

13. $y = -x^2 - 4x + k$ fonksiyonunun en büyük değeri 8 olduğuna göre k kaçtır?

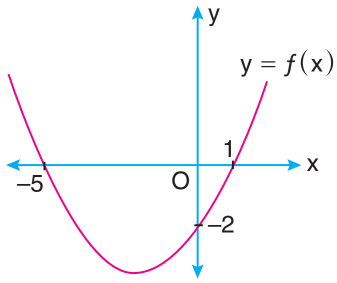
A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14. $y = 3x^2 + (k+3)x - 6$ parabolünün tepe noktası y ekseni üzerinde ise k kaçtır?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

15. $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ parabolünün eksenleri kestiği noktalar şekilde verilmiştir.

Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun en küçük değeri kaçtır?



A) $-\frac{18}{5}$ B) -3 C) -1

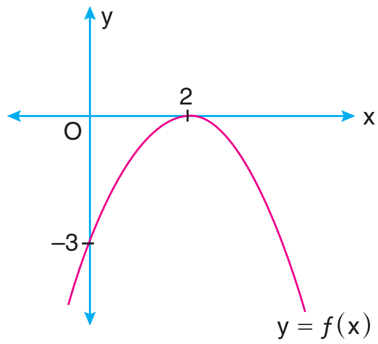
D) $\frac{18}{5}$ E) 1

16. Tepe noktası $(-3,16)$ olan ve $A(2,-9)$ noktasından geçen parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x^2 + 6x + 7$ B) $y = -x^2 + 6x + 7$ C) $y = -x^2 - 6x - 7$

D) $y = -x^2 - 6x + 7$ E) $y = -x^2 - 6x + 4$

17. Yanda grafiği verilen parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

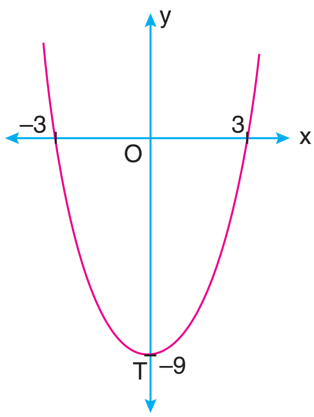


A) $y = \frac{4}{3}(x+2)^2$ B) $y = -\frac{3}{4}(x-2)^2$

C) $y = -\frac{3}{4}(x+2)^2$ D) $y = -\frac{3}{4}x^2$

E) $y = -\frac{4}{5}.(x-2)^2$

18. T tepe noktası olmak üzere şekildeki parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?



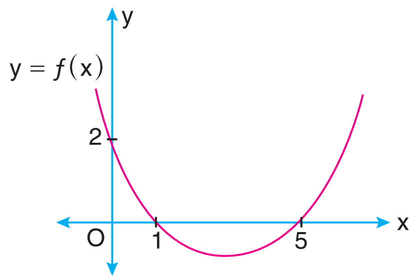
A) $y = x^2 - 3$ B) $y = -x^2 + 3$

C) $y = -x^2 - 9$ D) $y = x^2 - 9$

E) $y = x^2 + 9$

19. Yanda $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $f(2)$ kaçtır?

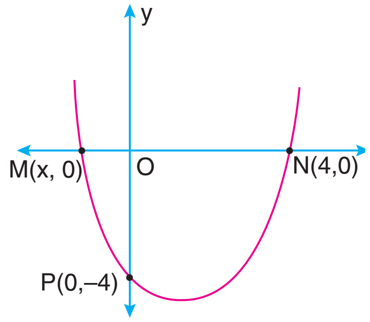


A) $-\frac{5}{6}$ B) $-\frac{6}{5}$

C) $-\frac{8}{5}$ D) $\frac{6}{5}$

E) $\frac{5}{6}$

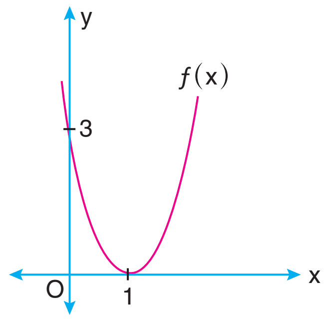
20. Şekildeki parabolün denklemi $y = x^2 + bx + c$ olduğuna göre $M(x,0)$ noktasının apsisi kaçtır?



A) -4 B) -3 C) -2

D) -1 E) 2

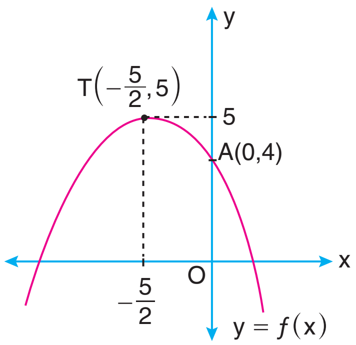
21. $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, şekildeki gibi x eksenine $(1,0)$ noktasında teğettir. Parabol, y eksenini $(0,3)$ noktasında kestiğine göre $f(4)$ kaçtır?



A) 9 B) 18 C) 21

D) 25 E) 27

22. Şekilde grafiği verilen parabolün tepe noktası $T\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$ ve y eksenini kestiği nokta $A(0,4)$ dır. Bu parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c$ olduğuna göre b kaçtır?



A) $-\frac{3}{5}$ B) $-\frac{5}{4}$ C) $-\frac{4}{5}$

D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

23. $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, y eksenine göre simetriktir. $f(x) = 2x^2 - f(-x)$ olduğuna göre $f(2)$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

24. $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m-1)x^4 - 2x^3 + (n+3)x^2 - x + r + 1$ fonksiyonunun grafiği, orijine göre simetrik ise $m + n + r$ kaçtır?

A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

25. $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a-1)x^3 - 4x^2 + (b-3)x + 2$ fonksiyonunun grafiği, y eksenine göre simetrik ise $f(a)$ kaçtır?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) 2

SAYILAR VE CEBİR

4. DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

4. DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ



4.1. İKİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMLERİ

4.1.1. İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemlerinin Çözüm Kümesi

a, b, c, d, e, $f \in \mathbb{R}$ ve a, b, c sayılarından en az ikisi sıfırdan farklı olsun.

$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

şeklindeki denklemlere **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler** denir.

Bu denklemi sağlayan (x, y) reel sayı ikililerine **denklemin çözümü** denir.

Birden fazla ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklemden oluşan sisteme **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.

Örnek

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 - 2xy &= 7 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini cebir ve grafik yardımıyla bulalım.

Çözüm

$2x + y = 1$ ise $y = 1 - 2x$ olur.

$x^2 - y^2 - 2xy = 7$

$x^2 - (1 - 2x)^2 - 2x \cdot (1 - 2x) = 7$

$x^2 - 1 + 4x - \cancel{4x^2} - 2x + \cancel{4x^2} = 7$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$x = -4$ veya $x = 2$ olur.

$x = -4$ için $2x + y = 1 \Rightarrow 2 \cdot (-4) + y = 1$

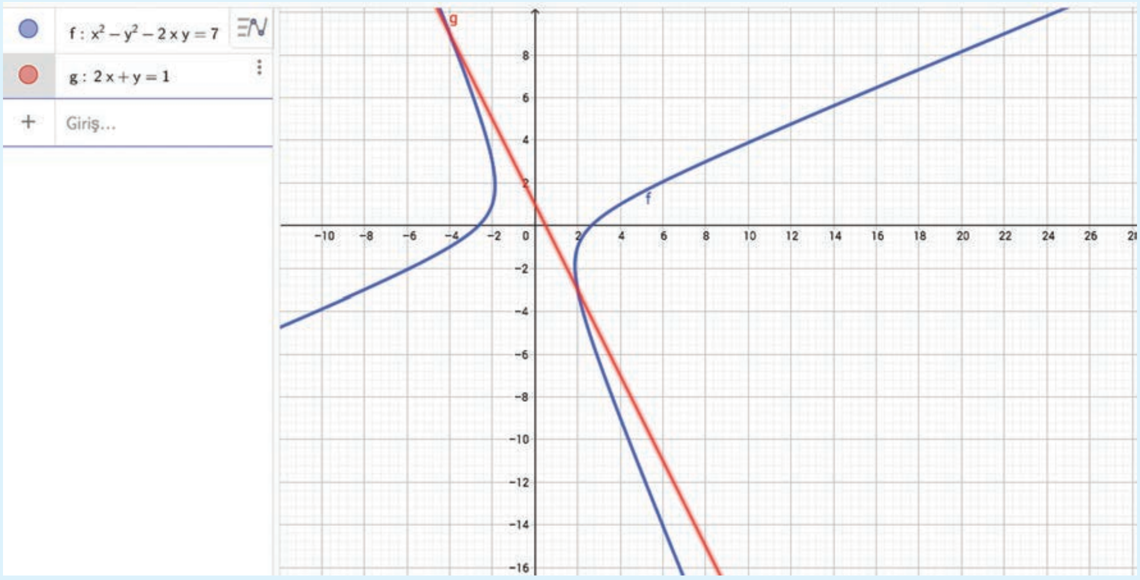
$y = 9$

$x = 2$ için $2x + y = 1 \Rightarrow 2 \cdot (2) + y = 1$

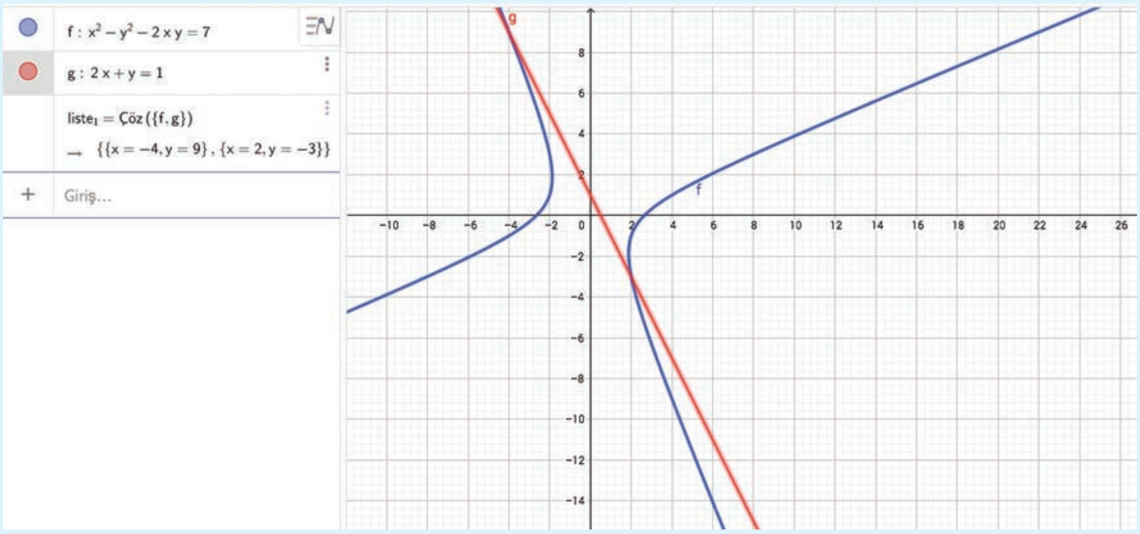
$y = -3$

$Ç = \{(-4, 9), (2, -3)\}$ bulunur.

Dinamik Matematik ve Geometri Programından yararlanarak birinci satırına $x^2 - y^2 - 2xy = 7$, ikinci satırına $2x + y = 1$ yazarak denklem sisteminin grafiğini oluşturalım.



• Çöz simgesini tıklayarak denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.



• Denklem sisteminin çözüm kümesi, $Ç = \{(-4, 9), (2, -3)\}$ dir. Denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanları grafiklerin kesim noktalarıdır.

Bir doğrusal denklem ile ikinci dereceden iki bilinmeyenden oluşan denklem sisteminde çözüm kümesi, yerine koyma yöntemi kullanılarak bulunur.

Örnek

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 + x + y &= 8 \\ x - y &= 3 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini cebir ve grafik yardımıyla bulalım.

Çözüm

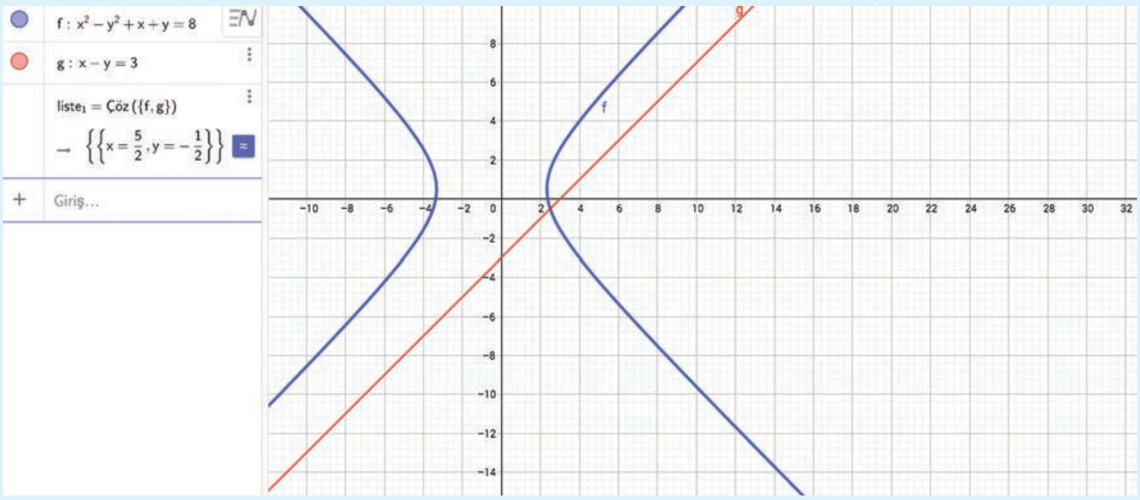
$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + x + y = 8 \Rightarrow (x - y)\cdot(x + y) + x + y &= 8 \\ 3\cdot(x + y) + x + y &= 8 \\ 4\cdot(x + y) &= 8 \\ x + y &= 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

$+$ ――――――

$$2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ ve } \frac{5}{2} - y = 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Buna göre $Ç = \left\{\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ bulunur.



$Ç = \left\{\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ dir. Çözüm kümesindeki bu nokta grafiklerin kesim noktasıdır.

Örnek

$$\left.\begin{aligned} 3x^2+xy-2y^2&=-18\\ 3x-2y&=-2\end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$3x^2+xy-2y^2=-18$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

$(3x-2y)\cdot(x+y)=-18$ olur.

$3x-2y=-2$ olduğundan $x+y=9$ dur.

$$\begin{aligned} 3x-2y&=-2\\ 2/\quad x+y&=9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-2y&=-2\\ +\quad 2x+2y&=18\\ \hline 5x&=16\\ x&=\frac{16}{5}\end{aligned}$$

$x=\frac{16}{5}$ için $3\cdot\frac{16}{5}-2\cdot y=-2 \Rightarrow 2y=\frac{48}{5}+2 \Rightarrow 2y=\frac{58}{5} \Rightarrow y=\frac{29}{5} \Rightarrow Ç=\left\{\left(\frac{16}{5},\frac{29}{5}\right)\right\}$ dir.

Örnek

$$\left.\begin{aligned} x^2-2y^2+3x+2&=0\\ y^2-2x-2&=0\end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} x^2-2y^2+3x+2&=0\\ 2/\quad y^2-2x-2&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2-2y^2+3x+2&=0\\ +\quad 2y^2-4x-4&=0\\ \hline x^2-x-2=0 &\Rightarrow (x-2)\cdot(x+1)=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow x=2$ veya $x=-1$ olur.

$x=2$ için $y^2-2x-2=0 \Rightarrow y^2-2\cdot2-2=0 \Rightarrow y^2=6 \Rightarrow y=\mp\sqrt{6}$

$x=-1$ için $y^2-2x-2=0 \Rightarrow y^2-2(-1)-2=0 \Rightarrow y^2=0 \Rightarrow y=0$

$Ç=\{(2,-\sqrt{6}),(2,\sqrt{6}),(-1,0)\}$ olur.

İki bilinmeyenli ikinci dereceden oluşan denklem sistemi taraf tarafa toplama yöntemi ile çözülür.

Örnek

$$\left.\begin{array}{r} 2x^2+y^2=32 \\ x^2-y^2=16 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\begin{array}{r} 2x^2+y^2=32 \\ + \quad x^2-y^2=16 \\ \hline 3x^2=48 \end{array}$$

$x^2=16 \Rightarrow x=\mp 4$ olur.

$x=-4$ için $x^2-y^2=16 \Rightarrow (-4)^2-y^2=16 \Rightarrow y^2=0 \Rightarrow y=0$

$x=4$ için $x^2-y^2=16 \Rightarrow 4^2-y^2=16 \Rightarrow y=0$

$Ç=\{(-4,0),(4,0)\}$ olur.

UYGULAYALIM 4-1

1. $\left.\begin{array}{r} x^2-y^2+x+y=10 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

2. $\left.\begin{array}{r} x^2-2y^2+3x=0 \\ y^2-x-1=0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

3. $\left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ x^2-y^2-2xy=1 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

4. $\left.\begin{array}{r} x^2-y^2+x+y=4 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

5. $\left.\begin{array}{r} x^2-y^2=11 \\ 2x^2+y^2=16 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

4.2. İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

4.2.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizliklerin Çözümü

$a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ olmak üzere

$ax^2 + bx + c > 0$

$ax^2 + bx + c < 0$

$ax^2 + bx + c \geq 0$

$ax^2 + bx + c \leq 0$

şeklinde ifade edilen eşitsizliklerin her birine **ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir.

Örnek

$x^2 - 3x + 2 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bularak grafiğini çizelim.

Çözüm

$x^2 - 3x + 2 = 0$ için $\triangle = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$ olduğundan farklı iki reel kök vardır.

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)\cdot(x-2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2$

Şimdi işaret tablosunu oluşturalım. Bunun için $x_1 = 1$ ve $x_2 = 2$ değerlerini küçükten büyüğe doğru aşağıdaki gibi işaret tablosuna yazalım.

x	$-\infty$	1		2		∞
$y = x^2 - 3x + 2$	+	0	−	0	+	

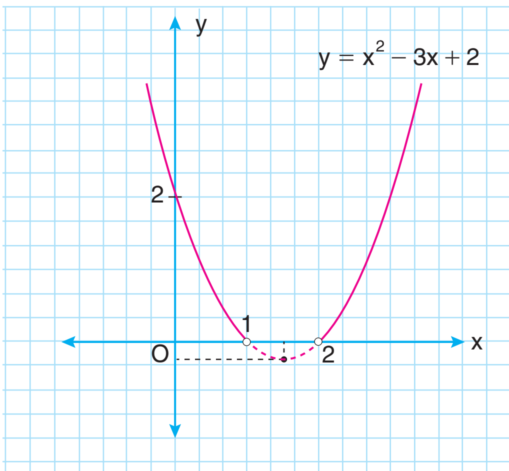
$x_1 = 1$ ve $x_2 = 2$ için $y = x^2 - 3x + 2$ sıfır değerini alır. Bu noktalarda fonksiyon işaret değiştirir. Tabloda en sağ bölüme x^2 li terimin işareti yazılır. Sırasıyla sola doğru her kökte işaret değiştirilir.

$x^2 - 3x + 2 > 0$ olduğundan işaret tablosunda pozitif olan bölgeler çözüm kümesidir.

$r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-3}{2} = \dfrac{3}{2}$ ve

$k = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right) + 2 = -\dfrac{1}{4}$

$Ç = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ olur.



Şimdi çözüm kümesini grafik üzerinde gösterelim.

Tepe noktası: $T\left(-\dfrac{b}{2a},\ f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right) = T\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$

$x^2 - 3x + 2 > 0$ olduğundan grafiğin x ekseninin yukarısında kalan kısmı çözüm kümesini verir.

Bu durumda $Ç = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ olur.

Örnek

$-x^2 + 6x + 7 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bularak grafiğini çizelim.

Çözüm

$y = -x^2 + 6x + 7$ için $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(-1) \cdot 7 = 36 + 28 = 64 > 0$ olduğundan farklı iki reel kök vardır.

$-x^2 + 6x + 7 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$

$(x+1) \cdot (x-7) = 0$

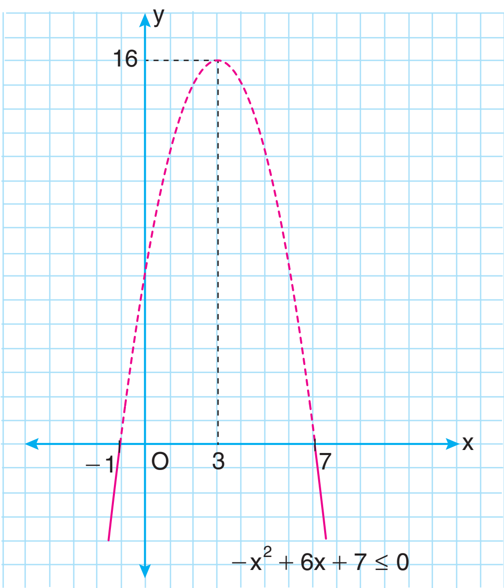
$x_1 = -1, \; x_2 = 7$

x	$-\infty$	-1		7	∞
$y = -x^2 + 6x + 7$	$-$	0	$+$	0	$-$

$-x^2 + 6x + 7 \leq 0$

$Ç = (-\infty, -1] \cup [7, \infty)$

$y = -x^2 + 6x + 7$ fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir.



Örnek

$x^2 - 4x + 4 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bularak grafiğini çizelim.

Çözüm

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = 2$ (çift katlı kök)

x^2li terimin katsayısı pozitif olduğundan kök hariç tablodaki aralıklar pozitiftir.

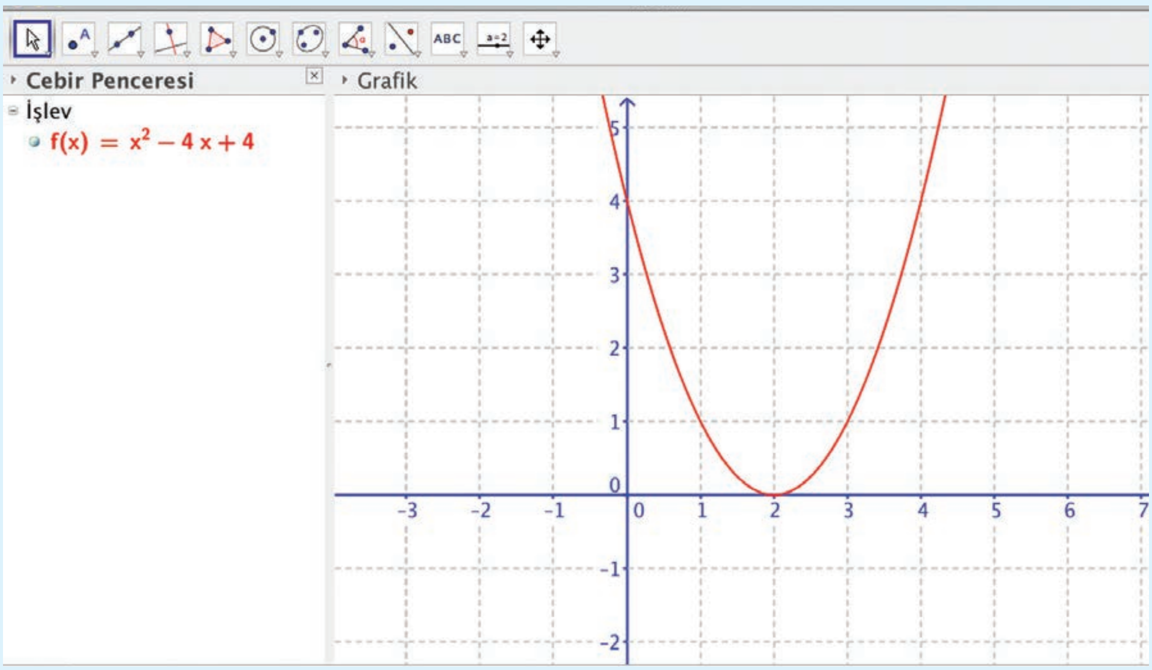
x	$-\infty$		2		∞
$y = x^2 - 4x + 4$		$+$	0	$+$	

Tabloda negatif bölge yoktur. $x = 2$ için $x^2 - 4x + 4 = 0$ olduğundan $Ç = \{2\}$ olur.

$y = x^2 - 4x + 4$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.

Tabloda negatif bölge olmadığından çözüm kümesi $Ç = \{2\}$ olur.

$x^2 - 4x + 4$ yazarak grafiği oluşturalım.



Negatif bölgede grafiğe ait herhangi bir bölüm olmadığından $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $Ç = \{2\}$ olur.

Örnek

$x^2 - 2x + 1 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bularak grafiğini çizelim.

Çözüm

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$

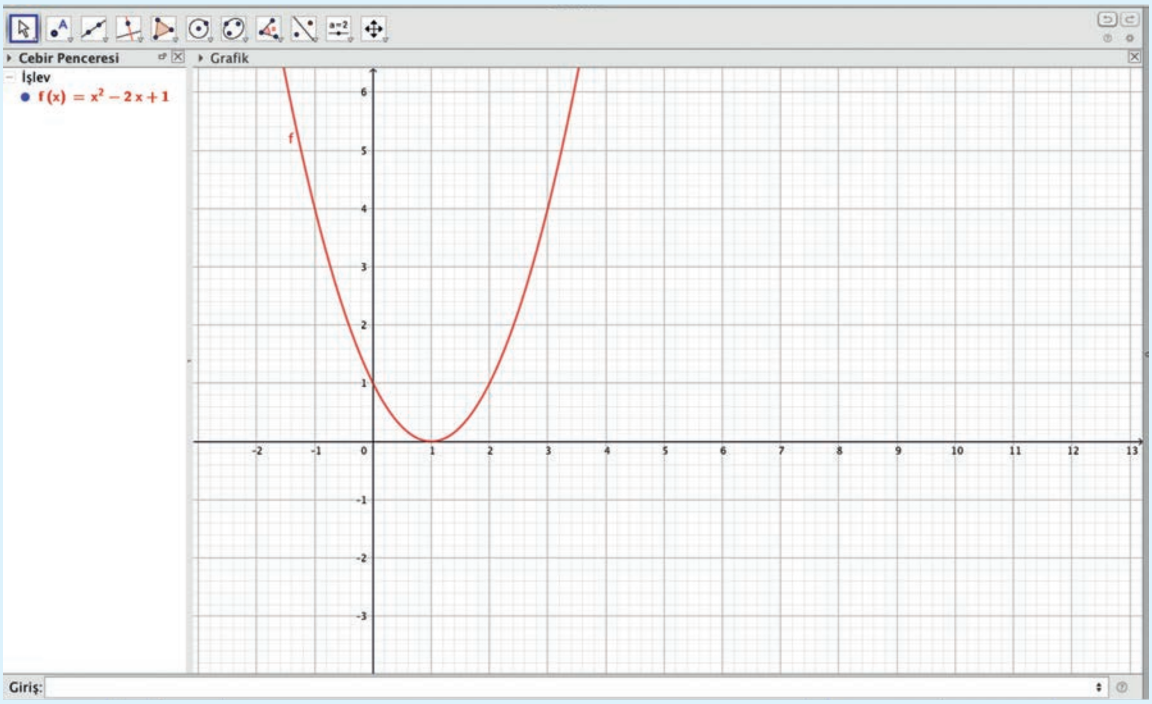
$\Rightarrow x_1 = x_2 = 1$ (çift katlı kök)

x^2li terimin katsayısı pozitif olduğundan kök hariç tablodaki aralıklar pozitiftir.

x	$-\infty$		1		∞
$y = x^2 - 2x + 1$		+	‖	+	

Tabloda negatif bölge olmadığı için $x^2 - 2x + 1 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\mathbb{R} - \{1\}$ dir.

Önce $y = x^2 - 2x + 1$ fonksiyonunu grafiği oluşturalım.



Grafik pozitif bölgede olduğundan $\mathbb{R} - \{1\}$ için çözüm kümesi $\mathbb{R}^+$ tir. $x^2 - 2x + 1 > 0$ eşitsizliğinde eşitlik durumu olmadığından eşitsizliği 0 (sıfır) yapan değer çözüm kümesine dahil değildir.

Örnek

$(x+4)\cdot(x^2-x)\geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$x+4=0 \Rightarrow x=-4$

$x^2-x=0 \Rightarrow x\cdot(x-1)=0 \Rightarrow x=0$ veya $x=1$

1. yol

Elde edilen köklerden yararlanarak her bir çarpanın işaretini bulalım.

x	$-\infty$	-4	0	1	∞
$x+4$	−	+	+	+	
x^2-x	+	+	−	+	
$(x+4)\cdot(x^2-x)$	−	+	−	+	

Tabloya göre $Ç=[-4,0]\cup[1,\infty)$ olur.

2. yol

Çarpım veya bölüm durumundaki ifadelerin başkatsayıları çarpılır. Çıkan sonucun işareti tablonun en sağındaki aralığın işaretidir. Diğer aralıklarda da sırasıyla işaret değiştirilerek yazılır.

Eğer çift katlı kök varsa bu kökün sağındaki ve solundaki işaret aynıdır.

$(x+4)$ ün başkatsayısı: 1
(x^2-x) in başkatsayısı: 1
} $1\cdot1=1$ olup işareti pozitiftir.

x	$-\infty$	-4	0	1	∞
$(x+4)\cdot(x^2-x)$	−	+	−	+	

$Ç=[-4,0]\cup[1,\infty)$

Örnek

$(x^2-2x+1)\cdot(x-2)<0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=1$ (Çift katlı kök)

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

1. yol

x	$-\infty$	1		2	∞
$(x-1)^2$	+	0	+		+
$x-2$	−		−	0	+
$(x^2-2x+1)\cdot(x-2)$	−		−		+

İfade çarpım durumunda olduğu için tablodaki her bir satırdaki işaretler çarpılır.

Tabloya göre çözüm kümesi $Ç=(-\infty,2)-\{1\}$ olur.

2. yol

Elde edilen kökleri ortak tabloda gösterelim.

x	$-\infty$	1		2	∞
$(x^2-2x+1)\cdot(x-2)$	−	0	−	0	+

$(x^2-2x+1)\cdot(x-2)<0$ olduğundan negatif bölge çözüm kümesidir.

Buna göre çözüm kümesi $Ç=(-\infty,2)-\{1\}$ olur.

Örnek

$\dfrac{(x-2)\cdot(x^2-3x-4)}{-x+6} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x^2-3x-4=0 \Rightarrow (x-4)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow x=4$ veya $x=-1$

$-x+6=0 \Rightarrow x=6$

$(x-2)$ nin başkatsayısı: 1

(x^2-3x-4) ün başkatsayısı: 1

$(-x+6)$ nın başkatsayısı: (-1)

$1\cdot 1\cdot(-1)=-1$ olup işareti negatiftir.

O hâlde, tablonun en sağındaki aralık negatiftir.

x	$-\infty$ ... -1	-1 ... 2	2 ... 4	4 ... 6	6 ... ∞
$\dfrac{(x-2)\cdot(x^2-3x-4)}{-x+6}$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

tanımsız ($x=6$)

$Ç=[-1,2]\cup[4,6)$ ($x=6$ için tanımsız olduğundan 6 çözüm kümesine dâhil değildir.)

Örnek

$\dfrac{(2-x)^6\cdot(x-1)^3}{x+1} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$(2-x)^6=0 \Rightarrow x=2$ (çift katlı kök)

$(x-1)^3=0 \Rightarrow x=1$ ise

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$(2-x)^6$ nın başkatsayısı: $(-1)^6=1$

$(x-1)^3$ ün başkatsayısı: $1^3=1$

$(x+1)$ in başkatsayısı: 1

$1\cdot 1\cdot 1=1\ (+)$

x	$-\infty$ ... -1	-1 ... 1	1 ... 2	2 ... ∞
$\dfrac{(2-x)^6\cdot(x-1)^3}{x+1}$	$+$	$-$	$+$	$+$

tanımsız ($x=-1$) çift katlı kök ($x=2$)

$Ç=(-\infty,-1)\cup[1,\infty)$

olduğundan tablonun en sağındaki aralık pozitiftir.
($x=-1$ için tanımsız olduğundan -1 çözüm kümesine dâhil değildir.)

Aynı kökten 2 veya 2 nin katı kadar bulunmuşsa bu kök çift katlı köktür. İşaret tablosunda çift katlı kökün sağı ve solu aynı işaretlidir.

4.2.2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik Sistemleri

İçerisinde en az bir ikinci dereceden eşitsizlik bulunduran eşitsizlik sistemine ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik sistemi denir.

Eşitsizlik sistemindeki her eşitsizliğin çözüm aralığı tablo yardımıyla ayrı ayrı bulunur. Bulunan aralıkların kesişim kümesi eşitsizlik sisteminin çözüm kümesidir.

Örnek

$\left.\begin{array}{l} 1-x^2>0 \\ x^2-4<0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bularak grafiğini çizelim.

Çözüm

$1-x^2=0$

$x^2=1 \Rightarrow x=\mp 1$

$x^2-4=0$

$x^2=4 \Rightarrow x=\mp 2$

Şimdi tablo oluşturalım.

x	$-\infty$ … -2	-2 … -1	-1 … 1	1 … 2	2 … ∞
$1-x^2>0$	−	−	+	−	−
$x^2-4<0$	+	−	−	−	+
			Çözüm kümesi		

Çözüm kümesi her iki eşitsizliğin çözüm kümesinin kesişim kümesi olduğundan

$Ç=(-1,1)$ olur.

Örnek

$\left.\begin{aligned} x^2 - x - 12 < 0 \\ x^2 + x \geq 0 \end{aligned}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x+3)\cdot(x-4) = 0$

$\Rightarrow x = -3 \text{ veya } x = 4$

$x^2 + x = 0 \Rightarrow x.(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \text{ veya } x = -1$

x	$-\infty$		-3		-1		0		4		∞
$x^2 - x - 12 < 0$		+	Ø	−		−		−	Ø	+	
$x^2 + x \geq 0$		+		+	Ø	−	Ø	+		+	

–1 ve 0, $x^2 + x \geqslant 0$ eşitsizliğini de sağladığından çözüme dahildir.

Tabloya göre $Ç = (-3, -1] \cup [0, 4)$ olur.

Örnek

$\left.\begin{aligned} \frac{x-3}{5-x} \geq 0 \\ \frac{-2}{x^2-16} < 0 \end{aligned}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\frac{x-3}{5-x} \geq 0$ için $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$5 - x = 0 \Rightarrow x = 5$

$\frac{-2}{x^2-16} < 0$ için $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x-4)\cdot(x+4) = 0$

$\Rightarrow x = 4 \text{ veya } x = -4$

x	$-\infty$		-4		3		4		5		∞
$\frac{x-3}{5-x}$		−		−	Ø	+		+	⋮	−	
$\frac{-2}{x^2-16}$		+		−		−		+		+	

$\frac{x-3}{5-x}$, $x = 5$ için, $\frac{-2}{x^2-16}$ ifadesi ise $x = -4$ ve $x = 4$ için tanımsızdır.

Tabloya göre $Ç = (4, 5)$ olur.

UYGULAYALIM 4-2

1. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $x^2 - x < 0$

b) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

c) $x^2 + x + 5 \leq 0$

ç) $-x^2 - x - 6 \geq 0$

d) $\dfrac{x-1}{x+4} > 0$

e) $\dfrac{x^2+5x+6}{x-2} \geq 0$

f) $(x^2-4)\cdot(x^2-1) < 0$

g) $\dfrac{(x^2-4x+3)\cdot(x-2)}{(x-3)} > 0$

2. $\dfrac{(x-3)^2\cdot(x-4)}{6-x} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

3. $\dfrac{(x+4)^2\cdot(x+3)}{x-1} < 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tam sayısı vardır?

4. $\left.\begin{array}{r} x^2 - 16 < 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

5. $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-1}{2-x} \leq 0 \\ 6x - x^2 > 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

6. $\left.\begin{array}{r} x^2 - x \geq 0 \\ x^2 + x < 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

7. $2 < x^2 - x < 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

8. $\left.\begin{array}{r} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ \dfrac{x-5}{x} \leq 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

9. $-8 < \dfrac{x-4}{x+2} \leq 8$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Yandaki karekodu tabletinize okutarak eba.gov.tr adresine bağlanınız. Konuyla ilgili videoyu izleyiniz. Buradan arama motorunu kullanarak diğer konularla ilgili videolara da ulaşabilirsiniz.

4. DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $\left.\begin{array}{r} x^2 - y^2 + x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$ denklem sistemine göre $x + y$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

2. $\left.\begin{array}{r} x^2 - 2y^2 + 3x = 2 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(1,1),(2,2)\}$

B) $\{(1,1),(-2,2)\}$

C) $\{(-1,0),(0,1)\}$

D) $\{(-2,-2),(-1,-1)\}$

E) $\{(0,1),(1,0)\}$

3. $\left.\begin{array}{r} x^2 - 2y^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 2 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(-2,0),(0,2)\}$

B) $\{(1,-1),(-1,1)\}$

C) $\{(0,-1),(0,1)\}$

D) $\{(-1,0),(1,0)\}$

E) $\{(0,1),(1,0)\}$

4. $\left.\begin{array}{r} 3x^2 + xy - 2y^2 = -18 \\ 3x - 2y = 6 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(-3,0)\}$ B) $\{(0,-3)\}$ C) $\{(-2,0)\}$ D) $\{(0,-2)\}$ E) $\{(-1,0)\}$

5. $\left.\begin{array}{r} 2x^2 + y^2 = 18 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(-1,0),(1,0)\}$

B) $\{(-2,0),(2,0)\}$

C) $\{(-3,0),(3,0)\}$

D) $\{(-4,0),(4,0)\}$

E) $\{(-3,3),(3,3)\}$

6. $-\dfrac{(x+4)\cdot(x+5)^2}{x} > 0$ eşitsizliğini sağlayan negatif tam sayılardan en küçüğü kaçtır?

A) -5 B) -3 C) -1 D) 1 E) 3

7. $(6-x)\cdot(x+5)\cdot(x-4)^2 > 0$ eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8. $\left.\begin{array}{r} x^2+x-2>0 \\ x^2-3x-4<0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2,2)$ B) $(-2,0)$ C) $(-1,0)$ D) $(1,4)$ E) $(-1,2)$

9. $\left.\begin{array}{r} x^2+x>12 \\ x^2-3x-10\leq 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,-3)$ B) $(-\infty,-3)]$ C) $(3,5]$ D) $[3,5]$ E) $[3,8)$

10. $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{(x+2)^2}>0 \\ \dfrac{x\cdot(x-2)}{x+5}<0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,-2)$ B) $(0,2)$ C) $(0,2]$ D) $[0,2]$ E) $(-2,2)$

11. $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4>0 \\ x^2-x\leq 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,-1)$ B) $(4,\infty)$ C) $[4,\infty)$ D) $\varnothing$ E) $(-1,4)$

GEOMETRİ

5. ÇEMBER VE DAİRE

5. ÇEMBER VE DAİRE

5.1. ÇEMBERİN TEMEL ELEMANLARI

5.2. ÇEMBERDE AÇILAR

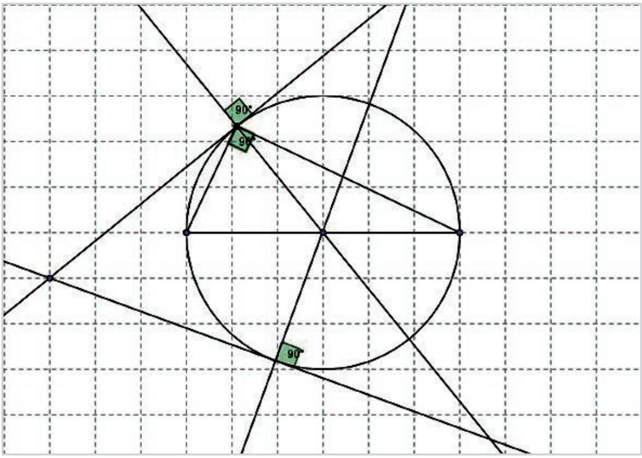
5.3. ÇEMBERDE TEĞET

5.4. DAİRENİN ÇEVRESİ VE ALANI



5.1. ÇEMBERİN TEMEL ELEMANLARI

Gök cisimleri genellikle küre biçiminde ve hep hareket halindedir. Bizse onları iki boyutlu biçimleriyle algılamaktayız. Daire, belki de insanoğlunun tanıştığı ilk geometrik şekildir. Bu şekil insanoğlunun doğada gözlemlediği ve içinde bir sır olduğunu düşündüğü ilk geometrik şekildir. İnsanlar muhtemelen güneşe, mehtaba bakıyorlar ve bu mükemmel şekli kendileri de çizmek, anlamak istiyorlardı. Fakat her yaptıkları çizimde dairenin içinde bir sır onlara göz kırpıyordu. Bu sır dairenin çevresi ile çapı arasında sabit bir oranın olmasıydı. Bu sayı yaklaşık 3,14 civarında bir sayıdır.



İsviçreli matematikçi Leonhard Euler (Lionhard Yülır), 1737 yılında yayımladığı eserinde, dairenin çevresinin çapına oranını göstermek için π sembolünü kullanmıştır. Leonard Euler'den önceki bazı matematikçiler tarafından kullanılan bu sembol, Euler'den sonra matematik alanında çalışma yapan bilim insanları tarafından benimsenmiş ve yaygınlaşmıştır.

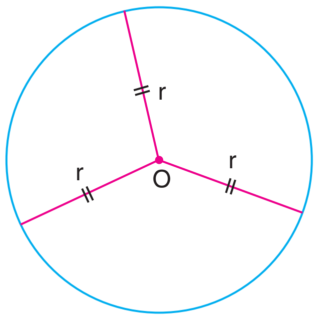
Kaynak: Sertöz Sinan, Matematiğin Aydınlık Dünyası.

5.1.1. Çemberde Teğet, Kiriş, Çap, Yay ve Kesen

Çember

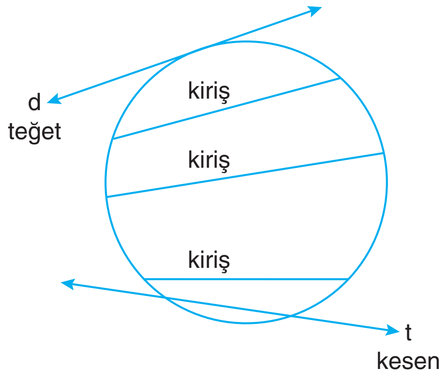
Düzlemde alınan sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **çember** denir.

Bu sabit noktaya çemberin merkezi, merkez ile çember üzerindeki noktalar arasındaki uzaklığa **çemberin yarıçapı** denir. Çemberin merkezi "O" ile, yarıçapı ise "r" sembolü ile gösterilir.



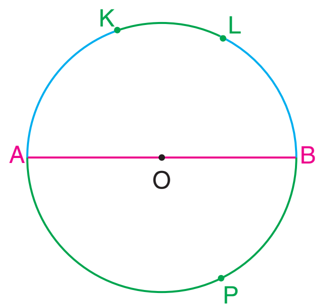
Çember

Çemberin Elemanları



Bir d doğrusu ile çemberin ortak tek noktası varsa d doğrusuna **çemberin teğeti,** çember üzerindeki farklı iki noktayı birleştiren doğru parçasına çemberin bir **kirişi,** çemberin merkezinden geçen kirişe **çap,** çemberi farklı iki noktada kesen doğruya **kesen**, çember üzerinde bulunan iki nokta arasındaki çembere ait noktaların kümesine **yay** denir.

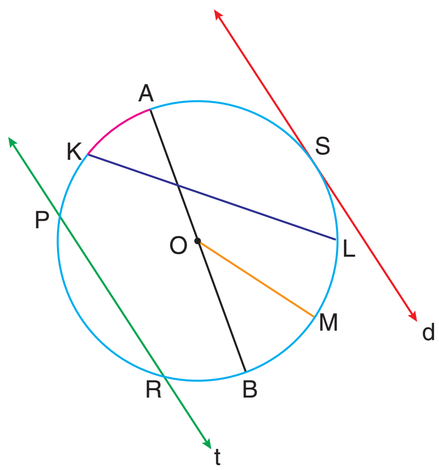
[AB]: Çap
$\overset{\frown}{KL}$: Yay
$\overset{\frown}{APB}$: Yay



KL yayı $\overset{\frown}{\mathbf{KL}}$, APB yayı $\overset{\frown}{\mathbf{APB}}$ şeklinde gösterilir.

Örnek

Şekilde O merkezli çemberin verilen bütün elemanlarını isimlendirelim.



Çözüm

d doğrusu : Teğet

t doğrusu : Kesen

[AB] : Çap

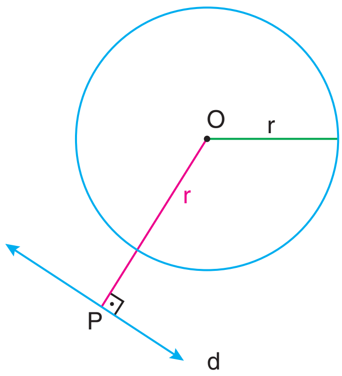
[OM] : Yarıçap

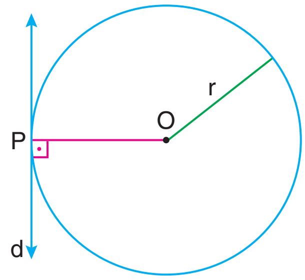
[KL] : Kiriş

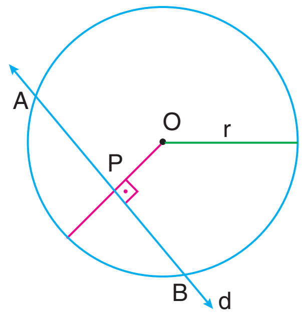
$\overset{\frown}{KA}$: Yay

Bir Çember ile Bir Doğrunun Birbirine Göre Durumları

Aynı düzlemde bulunan O merkezli çember ile bir d doğrusunun birbirine göre üç farklı durumu vardır. r çemberin yarıçapı olmak üzere;







I. $|OP| > r$ ise d doğrusu çemberi kesmez.

II. $|OP| = r$ ise d doğrusu çembere P noktasında teğettir.

III. $|OP| < r$ ise d doğrusu çemberi farklı iki noktada keser.

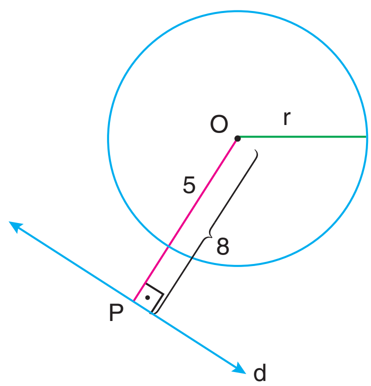
! Bir doğrunun çemberin merkezine olan uzaklığı, çemberin merkezinden doğruya çizilen dik doğru parçasının uzunluğuna eşittir.

Örnek

Bir d doğrusunun yarıçapının uzunluğu 5 cm olan bir çemberin merkezine olan uzaklığı 8 cm ise d doğrusu ile çemberin birbirine göre durumunu belirleyelim.

Çözüm

Yandaki şekilde $|OP| = 8$ cm ve $r = 5$ cm olduğundan $|OP| > r$ dir. Dolayısıyla d doğrusu çemberi kesmez.

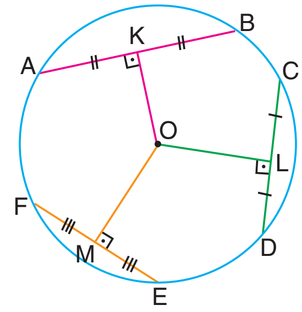


5.1.2. Çemberde Kirişin Özellikleri

• O merkezli bir çemberde, kirişin orta dikmesi çemberin merkezinden geçer.

• Bir kirişin orta noktasını çemberin merkezine birleştirilen doğru kirişe diktir.

Şekilde; $[AB] \perp [OK]$, $[CD] \perp [OL]$, $[EF] \perp [OM]$ ve $|AK| = |KB|$, $|CL| = |LD|$, $|FM| = |ME|$ dur.

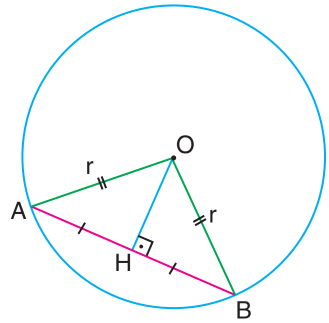


Örnek

Kirişin orta noktasını çemberin merkezine birleştiren doğru parçasının kirişe dik olduğunu gösterelim.

Çözüm

O merkezli çembere ait $[AB]$ kirişinin uç noktalarını O noktası ile birleştirdiğimizde AOB ikizkenar üçgeni elde edilir. Kirişin orta noktasını O noktası ile birleştiren doğru parçası, AOB ikizkenar üçgeninde $[AB]$ kenarına ait kenarortaydır. AOB ikizkenar üçgen olduğundan $[HO] \perp [AB]$ olmak zorundadır.



Örnek

Bir çemberde 24 cm uzunluğundaki kirişin merkeze olan uzaklığı 5 cm olduğuna göre çemberin yarıçapının uzunluğunu bulalım.

Çözüm

Yandaki şekilde $[OH] \perp [AB]$ ve $|AB| = 24$ cm ise

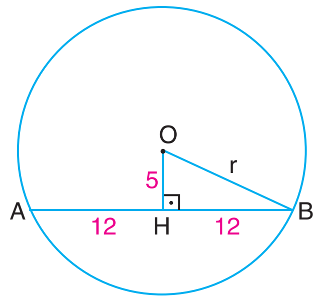
$|AH| = |HB| = 12$ cm dir.

$|OH| = 5$ cm olduğundan

HOB dik üçgeninde

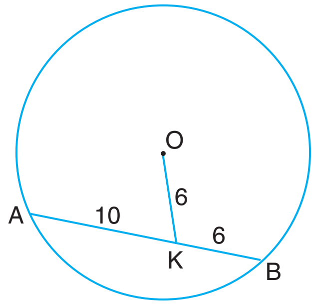
$|OB|^2 = |OH|^2 + |HB|^2$

$r^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow r = 13$ cm bulunur.

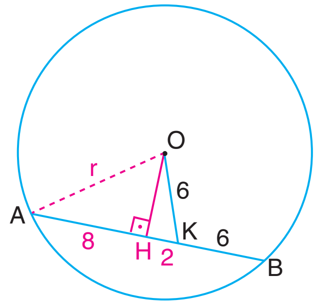


Örnek

O merkezli çemberde [AB] kiriş, |AK| = 10 cm ve |OK| = |KB| = 6 cm olduğuna göre çemberin yarıçapının uzunluğu kaç cm dir?



Çözüm



Yandaki şekilde [OH] ⊥ [AB] olacak şekilde [OH] çizelim.

|AH| = |HB| = 8 cm,

|HK| = |AK| − |AH| ise

|HK| = 10 − 8 = 2 cm olur.

OHK dik üçgeninde

$|OK|^2 = |OH|^2 + |HK|^2$

$6^2 = |OH|^2 + 2^2$

$|OH|^2 = 32$

$|OH| = 4\sqrt{2}$ cm olur.

AHO dik üçgeninde

$|AO|^2 = |OH|^2 + |AH|^2$ ise

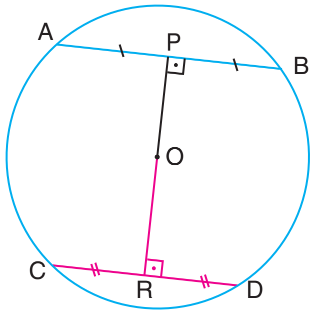
$r^2 = (4\sqrt{2})^2 + 8^2$

$r^2 = 32 + 64$

$r^2 = 96$

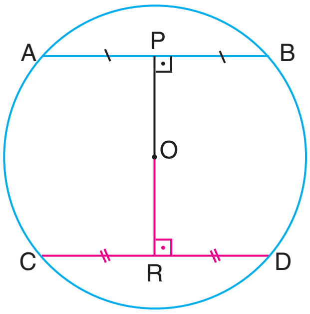
$r = 4\sqrt{6}$ cm dir.

Merkeze yakın olan kirişin uzunluğu diğerlerinden daha büyüktür. Merkeze eşit uzaklıktaki kirişlerin uzunlukları birbirine eşittir.



|OR| > |OP| ise

|AB| > |CD| dur.



|OP| = |OR| ise

|AB| = |CD| dur.

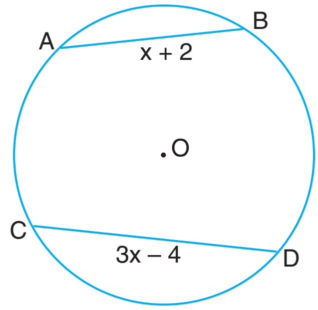
Bir çemberin çapı en uzun kirişidir.

Örnek

Yarıçapının uzunluğu 7 cm olan çemberde [CD] kirişi, merkeze [AB] kirişine göre daha yakındır.

[AB] ve [CD] kirişleri çemberin merkezinden geçmemek şartıyla

$|AB| = (x + 2)$ cm ve $|CD| = (3x - 4)$ cm olduğuna göre x in alabileceği tam sayı değerlerini bulalım.



Çözüm

[CD], çemberin merkezine daha yakın olduğundan

$|CD| > |AB|$ dur.

Buradan $3x - 4 > x + 2$

$2x > 6$

$x > 3 \cdots$ (A)

Çemberin çapı,

$2r = 2 \cdot 7 = 14$ cm dir.

En uzun kiriş çemberin çapı olduğundan

$|CD| \leqslant 14$

$3x - 4 \leqslant 14$

$3x \leqslant 18$

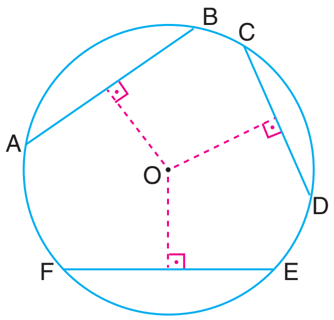
$x \leqslant 6 \cdots$ (B)

(A) ve (B) de belirtilen ifadelerden hareketle $3 < x \leqslant 6$ olup x in alabileceği tam sayılar 4, 5 ve 6 dır.

ETKİNLİK

Araç gereç: Cetvel

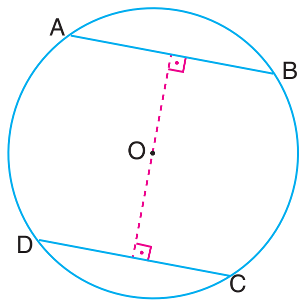
Aşağıdaki O merkezli çemberlerin her birinde verilen kirişlerin uzunluk ve merkeze olan uzaklıklarını ölçerek aralarındaki ilişkiyi “<”, “>”, “=” sembollerini kullanarak belirtiniz.



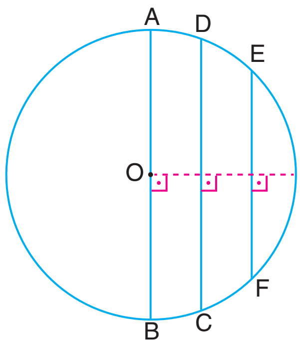
$|AB| \cdots |EF|$

$|AB| \cdots |CD|$

$|EF| \cdots |CD|$



$|AB| \cdots |CD|$



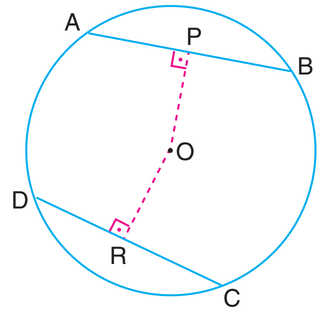
$|AB| \cdots |CD|$

$|AB| \cdots |EF|$

$|CD| \cdots |EF|$

Örnek

Yandaki O merkezli çemberde $[AB] \perp [OP], [CD] \perp [OR]$, $|OP| = |OR|$, $|AB| = (2x - 4)$ cm ve $|CD| = (4x - 12)$ cm olduğuna göre x kaçtır?



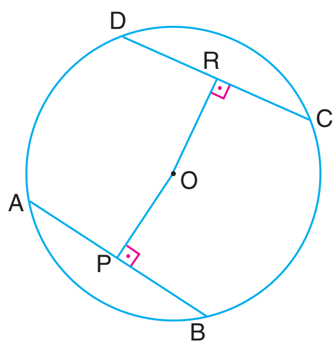
Çözüm

$|OP| = |OR|$ olduğundan $|AB| = |CD|$ dur.

Buna göre $2x - 4 = 4x - 12$ ise $2x = 8$ ise $x = 4$ bulunur.

Örnek

Yandaki O merkezli çemberde D, R ve C doğrusal noktalar, A, P ve B doğrusal noktalar $[AB] \perp [OP], [CD] \perp [OR]$, $|AB| = |CD| = 10$ cm, $|OP| = (2x + 1)$cm ve $|OR| = (x + 3)$cm olduğuna göre çemberin yarıçapının uzunluğu kaç cm dir?



Çözüm

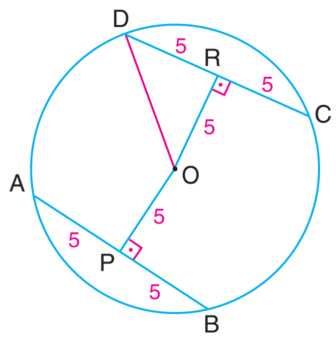
$|AB| = |CD| = 10$ cm ise $|AP| = |PB| = |DR| = |RC| = 5$ cm dir.

$|OP| = |OR|$ ise $2x + 1 = x + 3$

$x = 2$ cm olur. Buradan $|OR| = x + 3 = 2 + 3 = 5$ cm bulunur.

ORD dik üçgeninde

$|OD|^2 = |OR|^2 + |RD|^2$ ise $r^2 = 5^2 + 5^2$ ise $r = 5\sqrt{2}$ cm dir.



UYGULAYALIM 5-1

1. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına “D”, yanlış olanların başına “Y” harfi yazınız.

☐ Bir çemberin en uzun kirişi çemberin çapıdır.

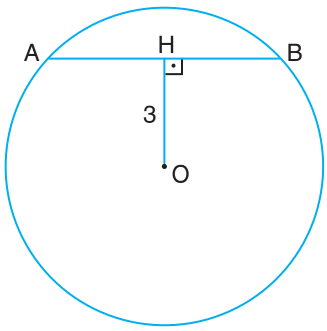
☐ Çemberin farklı iki noktasını birleştiren doğru parçasına teğet denir.

☐ Çemberin merkezine en yakın olan kiriş diğerlerinden daha uzundur.

☐ Çemberin merkezinden kirişlere indirilen dikme, kirişleri ortadan kesmek zorunda değildir.

☐ Çemberin merkezine eşit uzaklıkta olan kirişlerin uzunlukları birbirine eşittir.

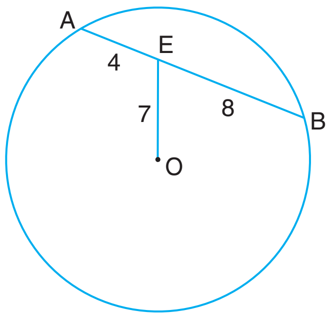
2. Yandaki O merkezli çemberde $|AB| = 8$ cm, $|OH| = 3$ cm ve $|OH| \perp [AB]$ olduğuna göre çemberin yarıçapının uzunluğunu bulunuz.



3. Yandaki O merkezli çemberde, A, E, B noktaları doğrusal, $|AE| = 4$ cm, $|EB| = 8$ cm

ve $|OE| = 7$ cm olduğuna göre çemberin yarıçapının

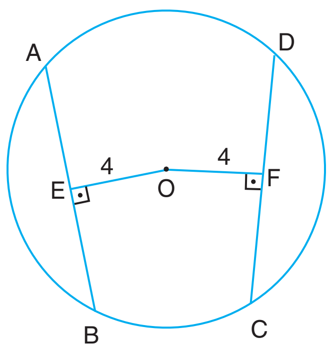
uzunluğunu bulunuz.



4. Yandaki O merkezli çemberde,A, E, B ve D, F, C noktaları doğrusal, $[AB] \perp [OE]$, $[CD] \perp [OF]$,

$|OE| = |OF| = 4$ cm, $|AE| = (x + 1)$ cm,

$|CF| = (2x - 3)$ cm olduğuna göre çemberin yarıçapının uzunluğunu bulunuz.



5. Bir çemberin merkezinden 3 cm uzaklıktaki kirişin uzunluğu 8 cm olduğuna göre 4 cm uzaklıktaki kirişin uzunluğu kaç cm dir?

5.2. ÇEMBERDE AÇILAR

5.2.1. Bir Çemberde Merkez, Çevre, İç, Dış ve Teğet-Kiriş Açılar

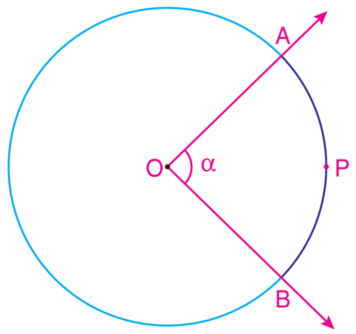
Merkez Açı

Başlangıç noktası, çemberin merkezi olan açıya **merkez açı** denir.

Bir çemberde merkez açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

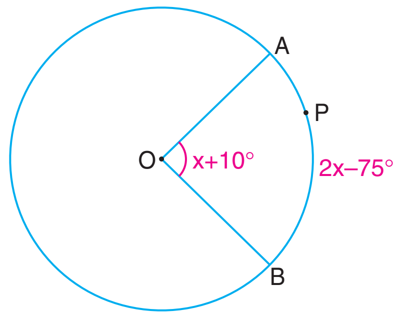
Şekilde $\widehat{AOB}$ merkez açı ve $\overset{\frown}{APB}$ merkez açının gördüğü yay olmak üzere

$m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{APB})$ dür.



Örnek

Yandaki O merkezli çemberde $m(\widehat{AOB}) = x + 10°$ ve $m(\overset{\frown}{APB}) = 2x - 75°$ olduğuna göre x kaç derecedir?



Çözüm

$m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{APB})$ olduğundan

$x + 10° = 2x - 75°$

ise $x = 85°$ bulunur.

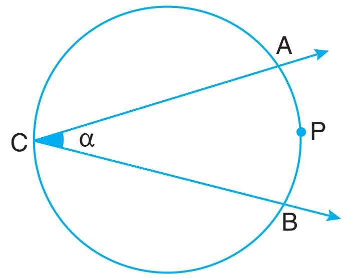
Çevre Açı

Köşesi çemberin üzerinde olan ve kolları çemberi kesen açıya **çevre açı** denir.

$\widehat{ACB}$ çevre açıdır.

Bir çevre açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.

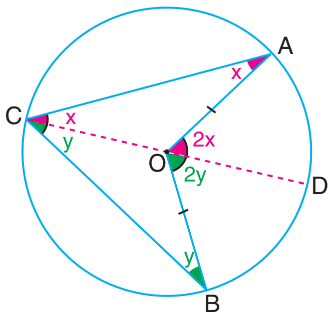
$\alpha = m(\widehat{ACB}) = \frac{1}{2} \cdot m(\overset{\frown}{APB})$



Örnek

Bir çevre açının ölçüsünün, aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşit olduğunu gösterelim.

Çözüm



Şekilde $|AO| = |OC| = |OB| = r$ (yarıçap) olduğundan AOC ikizkenar üçgeninde

$m(\widehat{CAO}) = m(\widehat{ACO}) = x$ alınırsa iki iç açının ölçüleri toplamı kendilerine komşu olmayan dış açının ölçüsüne eşit olduğundan

$m(\widehat{AOD}) = 2x$ olur.

Benzer şekilde BOC ikizkenar üçgeninde

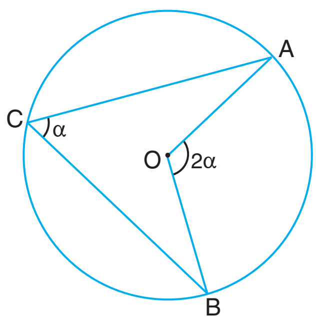
$m(\widehat{CBO}) = m(\widehat{BCO}) = y$ alınırsa $m(\widehat{BOD}) = 2y$ olur.

Bu durumda

$m(\widehat{AOB}) = 2x + 2y = 2\cdot(x + y) = 2\cdot m(\widehat{ACB})$ olup

$$m(\widehat{ACB}) = \frac{1}{2}\cdot m(\widehat{AOB}) \text{ bulunur.}$$

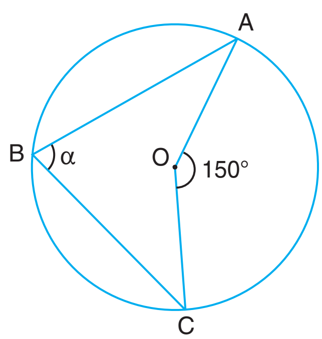
SONUÇ



Bir çevre açının ölçüsü α ise aynı yayı gören merkez açının ölçüsü 2α dır.

$m(\widehat{AOB}) = 2\cdot m(\widehat{ACB}) = 2\alpha$

Örnek



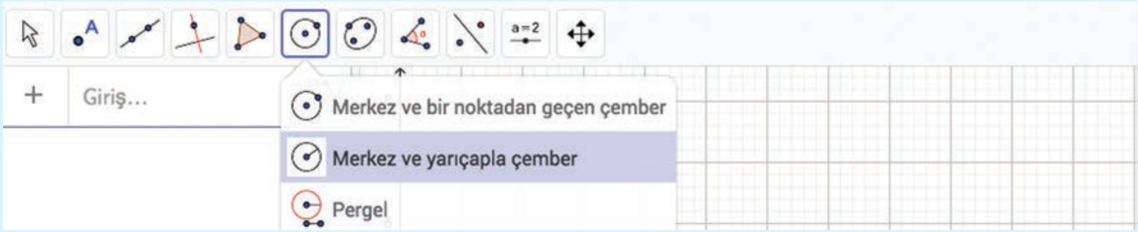
Yandaki O merkezli çemberde $m(\widehat{AOC}) = 150°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ kaç derecedir?

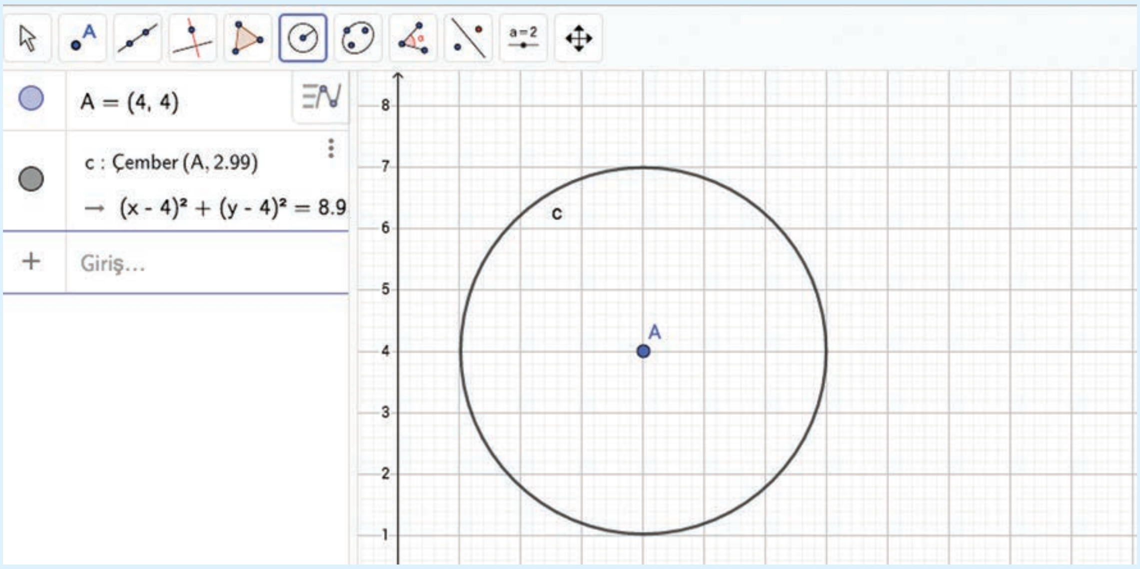
Çözüm

$\widehat{AOC}$ merkez açı ve $\widehat{ABC}$ aynı yayı gören çevre açı olduğundan

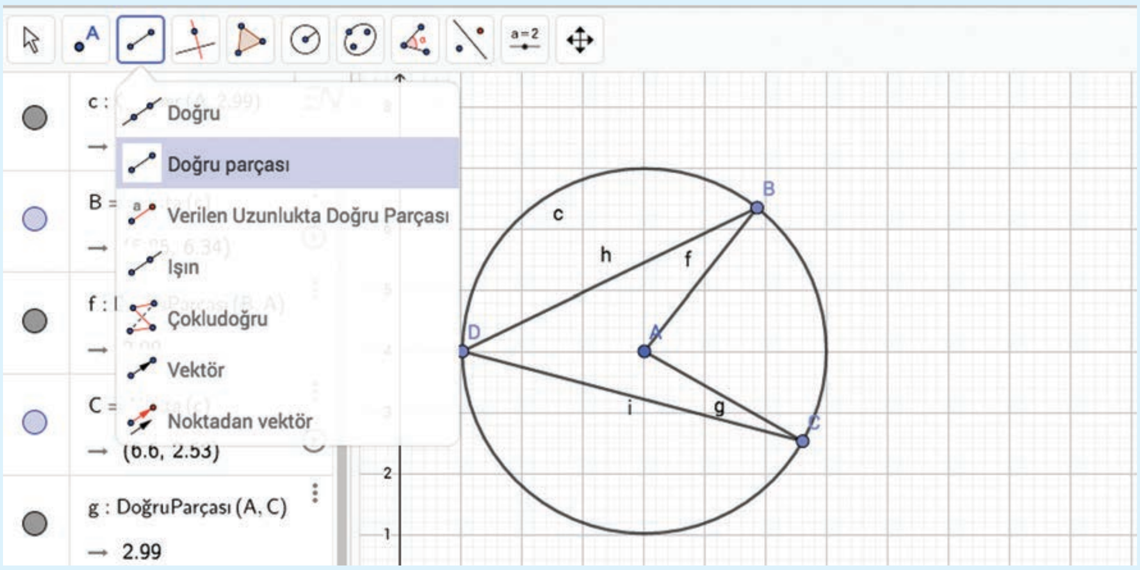
$m(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}\cdot m(\widehat{AOC}) = \frac{1}{2}\cdot 150° = 75°$ bulunur.

Dinamik Matematik ve Geometri Programından yararlanarak açılan pencereye oluşturacağımız çemberin merkezinin koordinatlarını ve yarıçapını yazarak çember oluşturalım.

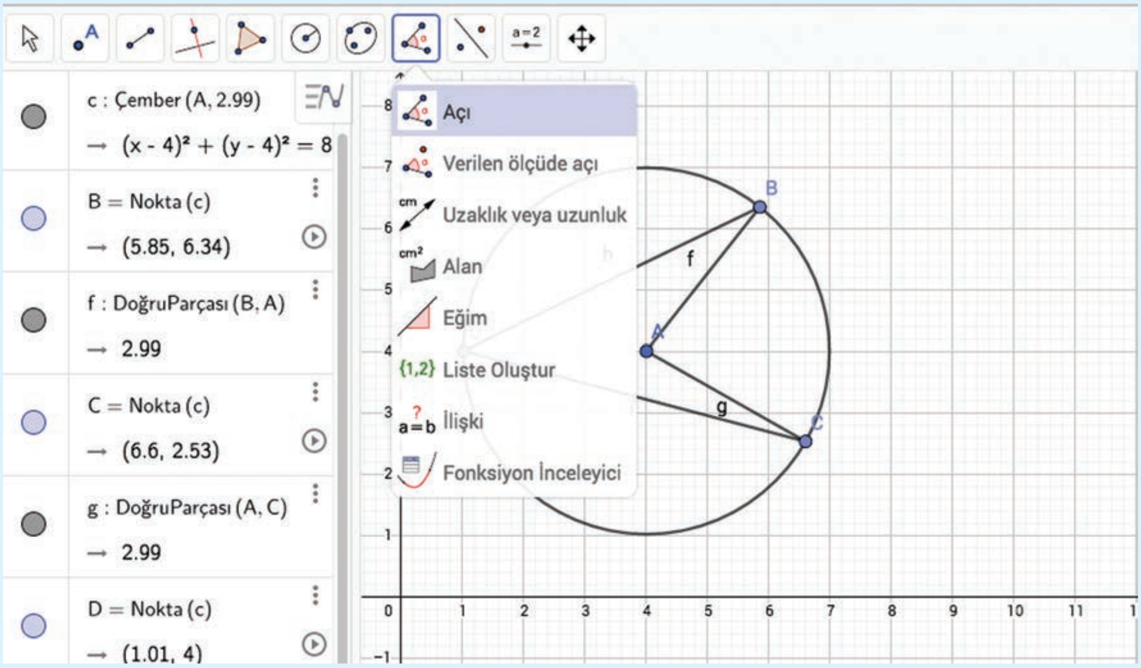




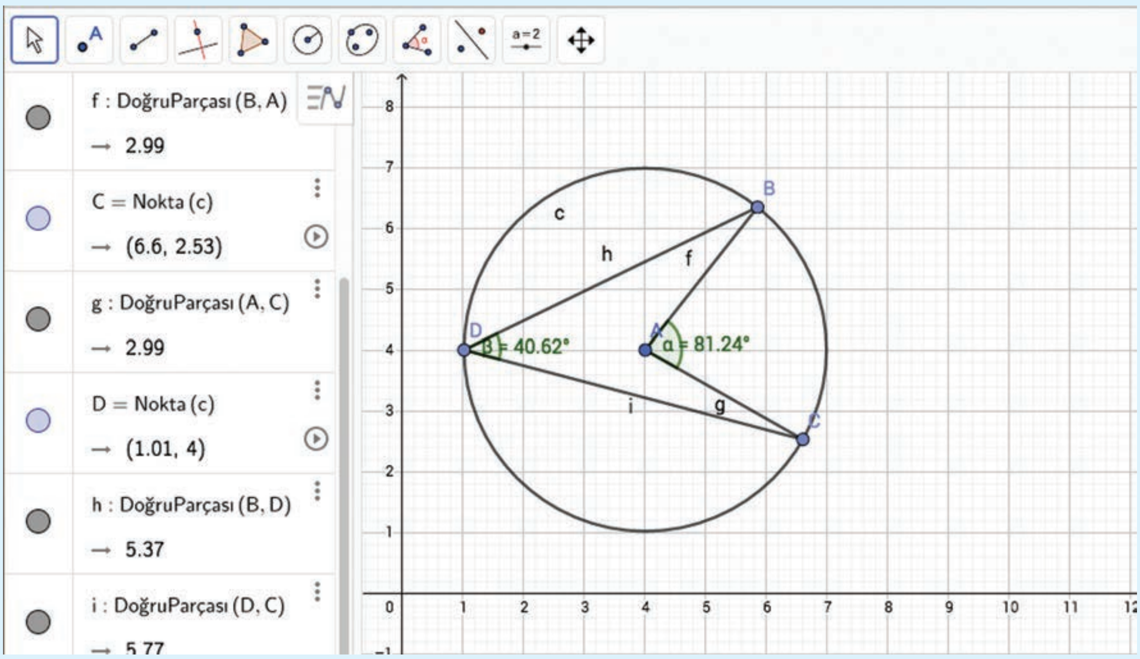
Doğru parçası menüsünü kullanarak çemberin üzerinden ve merkezinden şekildeki gibi açılar çizelim.



Açı menüsünü kullanarak oluşturduğumuz merkez ve çevre açının ölçülerini bulalım.

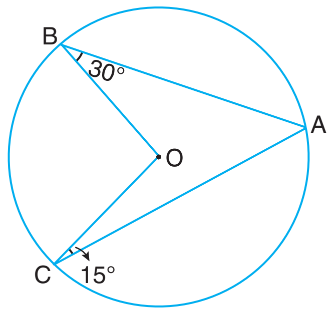


Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi aynı yayı gören çevre açının ölçüsü merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir.



Örnek

Şekildeki O merkezli çemberde $m(\widehat{ABO}) = 30°$, $m(\widehat{ACO}) = 15°$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?



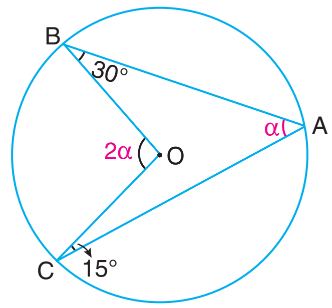
Çözüm

$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ alınırsa $m(\widehat{BOC}) = 2\alpha$ olur.

Buradan

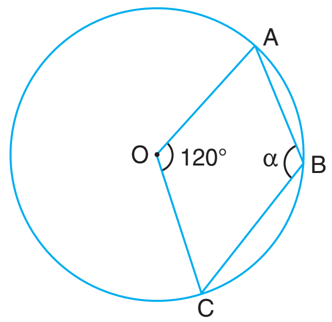
$2\alpha = 30° + 15° + \alpha$

$m(\widehat{BAC}) = \alpha = 45°$ olur.



Örnek

Şekildeki O merkezli çemberde $m(\widehat{AOC}) = 120°$ ise $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ kaç derecedir?



Çözüm

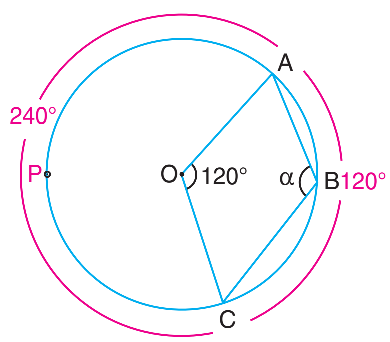
Merkez açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşit olduğundan

$m(\widehat{ABC}) = 120°$ olup $m(\widehat{APC}) = 360° - 120°$

$= 240°$dir.

Bu durumda

$m(\widehat{ABC}) = \alpha = \dfrac{240°}{2} = 120°$ bulunur.



Örnek

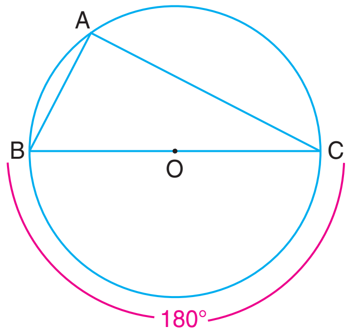
Çapı gören çevre açının ölçüsünü bulalım.

Çözüm

Şekildeki O merkezli çemberde BAC açısı çapı görmektedir. Çap, çemberi iki eş parçaya ayırdığından BAC açısının gördüğü yayın ölçüsü $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ olur.

Bu durumda BAC çevre açısının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşit olduğundan

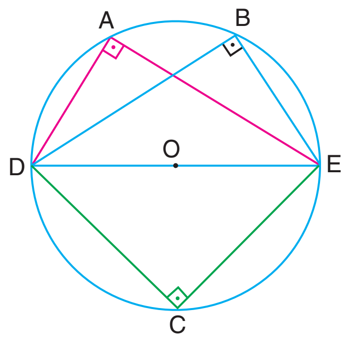
$m(\widehat{BAC}) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$dir.



SONUÇ

Çapı gören çevre açının ölçüsü 90°dir. Şekilde

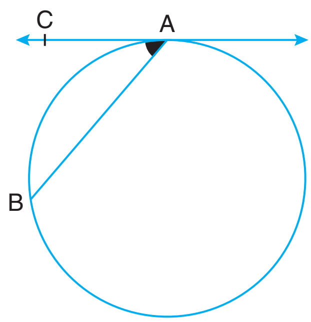
$m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{DCE}) = 90^\circ$dir.



Teğet-Kiriş Açı

Köşesi çember üzerinde kenarlarından biri çembere teğet, diğeri de çemberin kirişi olan açıya **teğet-kiriş açı** denir.

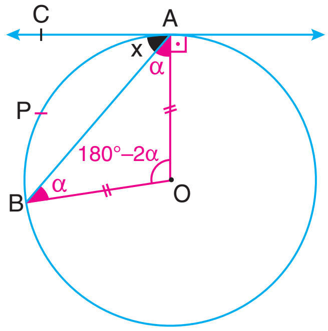
Şekildeki BAC açısı teğet-kiriş açıdır.



Örnek

Teğet-kiriş açının ölçüsünün, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşit olduğunu gösterelim.

Çözüm



Şekilde $|AO| = |BO| = r$ olduğundan

AOB ikizkenar üçgendir.

AOB üçgeninde

$m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{ABO}) = \alpha$ alınırsa

$m(\widehat{AOB}) = 180° - 2\alpha$ olur.

AOB merkez açı olduğundan

$m(\overparen{APB}) = m(\widehat{AOB}) = 180° - 2\alpha \cdots$ bulunur. (A)

$[AO] \perp [AC]$ olduğundan

$m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{BAO}) = 90°$ ise

$x + \alpha = 90°$

$\alpha = 90° - x \cdots$ bulunur. (B)

(A) ve (B) den

$m(\overparen{APB}) = 180° - 2\alpha$

$= 180° - 2 \cdot (90° - x)$

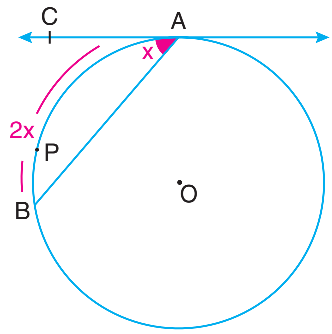
$= 180° - 180° + 2x$

$= 2x$ ise $x = m(\widehat{BAC}) = \dfrac{m(\overparen{APB})}{2}$ dir.

SONUÇ

Teğet-kiriş açısının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.

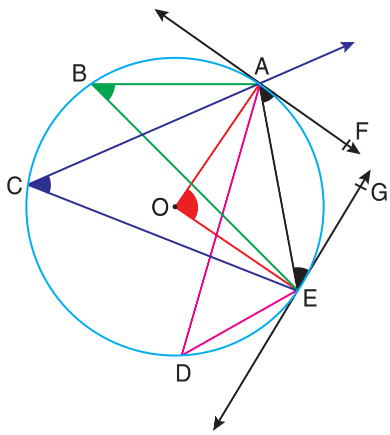
Şekilde $m(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2} \cdot m(\overparen{APB})$ dür.



ETKİNLİK

Araç gereç: Açıölçer

- Şekilde farklı renklerle verilen her bir açının ölçüsünü açıölçer yardımıyla ölçünüz. Bulduğunuz açıların ölçülerini boş kutulara yazınız.



$m(\widehat{EAF}) = \square$ $m(\widehat{ABE}) = \square$

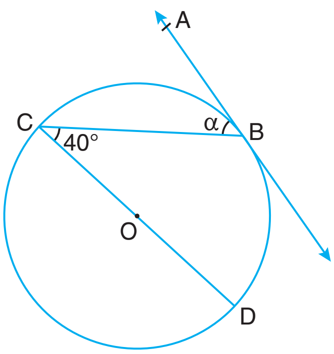
$m(\widehat{ACE}) = \square$ $m(\widehat{ADE}) = \square$

$m(\widehat{AOE}) = \square$ $m(\widehat{AEG}) = \square$

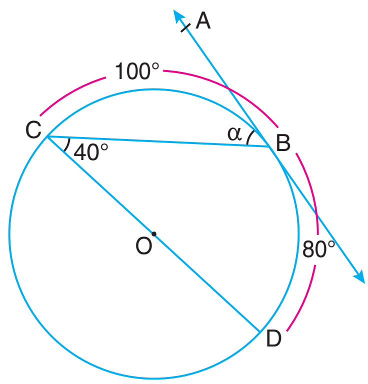
- Bulduğunuz açıların ölçülerini karşılaştırınız.
- Aynı yayı gören merkez açı, çevre açılar ve teğet-kiriş açılar arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

Örnek

AB, O merkezli çembere B noktasında teğettir. [CD], çemberin çapı ve $m(\widehat{BCD}) = 40°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ kaç derecedir?



Çözüm



$m(\widehat{BCD}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BD})}{2}$ ise

$m(\overset{\frown}{BD}) = 2 \cdot m(\widehat{BCD}) = 2.40° = 80°$dir.

$m(\overset{\frown}{BC}) = 180° - 80° = 100°$ olur.

$m(\widehat{ABC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{2}$ olduğundan

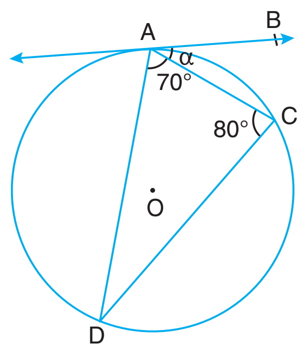
$m(\widehat{ABC}) = \alpha = \dfrac{100°}{2} = 50°$dir.

Örnek

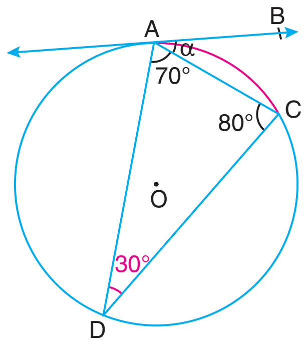
AB, O merkezli çembere A noktasında teğettir.

$m(\widehat{CAD}) = 70°$, $m(\widehat{ACD}) = 80°$ olduğuna göre

$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ kaç derecedir?



Çözüm



ACD üçgeninde

$m(\widehat{ADC}) + 70° + 80° = 180°$ ise

$m(\widehat{ADC}) = 30°$dir.

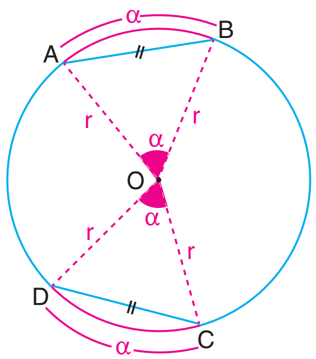
Aynı yayı gören çevre açının ölçüsü ile teğet-kiriş açının ölçüsü birbirine eşit olduğundan

$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{BAC}) = \alpha = 30°$dir.

Örnek

Eş kirişlerin ayırdığı yayların eş ve paralel kirişlerin arasında kalan yayların eş olduğunu gösterelim.

Çözüm

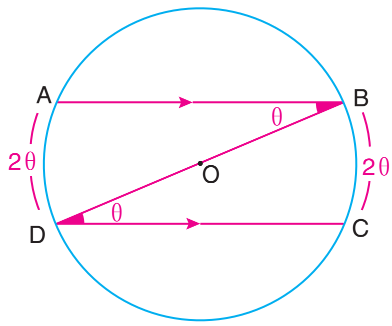


Şekilde $[AB] \cong [CD]$ ve

$|AO| = |OB| = |OD| = |OC|$ olduğundan

$\widehat{AOB} \cong \widehat{DOC}$ olur. Buradan

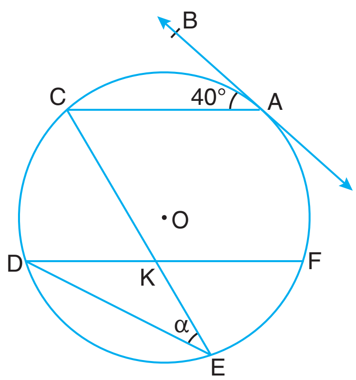
$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{DOC}) = \alpha$ olup $\widehat{AOB}$ ve $\widehat{DOC}$ merkez açılar olduğundan bu açıların gördükleri yaylar eştir.



Şekildeki O merkezli çemberde $[AB]//[CD]$ olsun. Bu durumda $\widehat{ABD}$ ile $\widehat{CDB}$ iç ters açılar olup $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CDB}) = \theta$ dır. Buradan

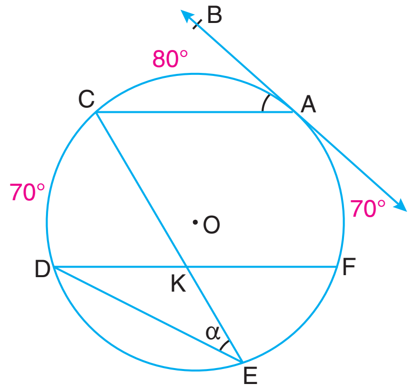
$\overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{BC}$ olur.

Örnek



AB, O merkezli çembere A noktasında teğettir. C, K, E noktaları doğrusal ve D, K, F noktaları doğrusal, $[AC]//[DF]$, $m(\widehat{BAC}) = 40°$, $m(\overset{\frown}{DEF}) = 140°$ olduğuna göre $m(\widehat{CED}) = \alpha$ kaç derecedir?

Çözüm



$m(\overset{\frown}{DEF}) = 140°$ ise

$m(\overset{\frown}{DAF}) = 360° - 140° = 220°$ olur.

[AC]//[DF] olduğundan

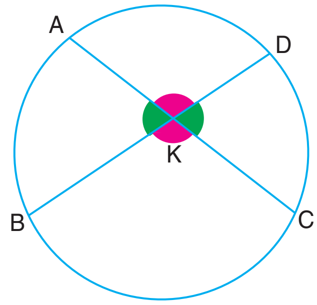
$m(\overset{\frown}{CD}) = m(\overset{\frown}{AF})$ dür. Buna göre

$m(\overset{\frown}{AC}) = 2.m(\widehat{BAC}) = 2.40° = 80°$

$m(\overset{\frown}{CD}) + m(\overset{\frown}{AF}) = 220° - 80° = 140°$

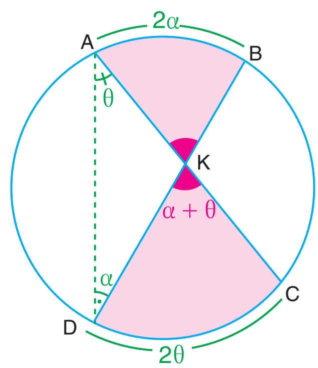
$m(\overset{\frown}{CD}) = \frac{140°}{2} = 70°$ olur. $m(\widehat{CED}) = \alpha = \frac{1}{2} \cdot m(\overset{\frown}{CD}) = \frac{1}{2} \cdot 70° = 35°$ bulunur.

Çemberde İç Açı



Çemberin içinde kesişen iki kirişin oluşturduğu açılardan her birine **çemberin iç açısı** denir.

Çemberde bir iç açının ölçüsü, gördüğü yayların ölçüleri toplamının yarısına eşittir.



Şekilde $m(\widehat{ADB}) = \alpha$ ise

$m(\overset{\frown}{AB}) = 2\alpha$

$m(\widehat{CAD}) = \theta$ ise $m(\overset{\frown}{CD}) = 2\theta$ ve

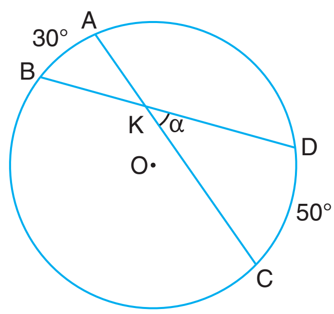
$m(\widehat{CKD}) = \alpha + \theta$ olur.

Bu durumda

$$\begin{aligned} m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{CD}) &= 2\alpha + 2\theta \\ &= 2\cdot(\alpha + \theta) \\ &= 2\cdot m(\widehat{CKD}) \text{ ise} \end{aligned}$$

$m(\widehat{CKD}) = \frac{1}{2} \cdot [m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{CD})]$ olur.

Örnek

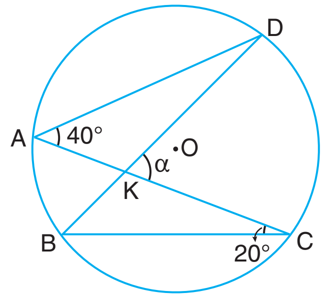


Şekildeki O merkezli çemberde $[AC] \cap [BD] = \{K\}$, $m(\overset{\frown}{AB}) = 30°$ ve $m(\overset{\frown}{CD}) = 50°$ olduğuna göre $m(\widehat{CKD}) = \alpha$ kaç derecedir?

Çözüm

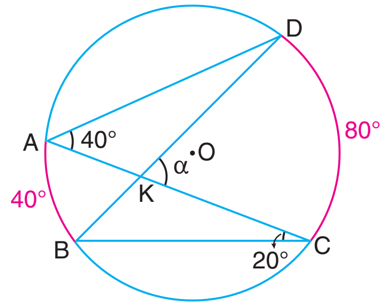
$$m(\widehat{CKD}) = \alpha = \frac{1}{2}\cdot[m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{CD})]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot[30° + 50°] = 40° \text{ olur.}$$

Örnek



Şekildeki O merkezli çemberde $[AC] \cap [BD] = \{K\}$, $m(\widehat{CAD}) = 40°$, $m(\widehat{ACB}) = 20°$ olduğuna göre $m(\widehat{CKD}) = \alpha$ kaç derecedir?

Çözüm



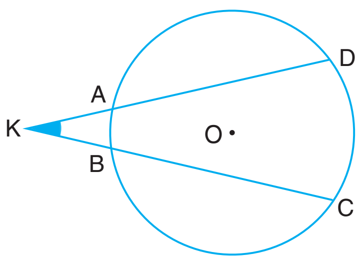
$$m(\overset{\frown}{CD}) = 2\cdot m(\widehat{CAD})$$
$$= 2\cdot 40° = 80° \text{ ve}$$
$$m(\overset{\frown}{AB}) = 2\cdot m(\widehat{ACB}) = 2\cdot 20° = 40°\text{dir.}$$

Buna göre $m(\widehat{CKD}) = \alpha = \frac{1}{2}\cdot[m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{CD})]$

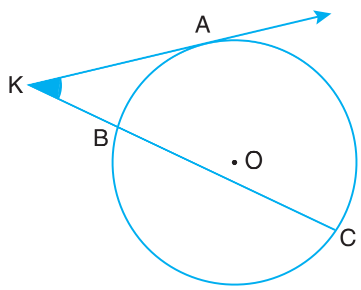
$$= \frac{1}{2}\cdot[40° + 80°] = 60° \text{ bulunur.}$$

Çemberde Dış Açı

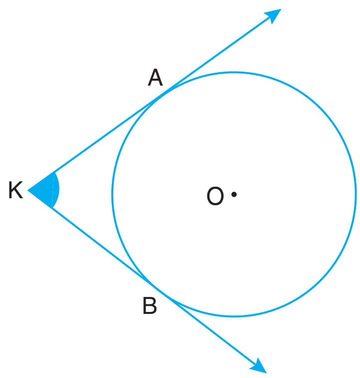
Köşesi çemberin dışında, kolları çembere teğet veya çemberi kesen açıya **çemberin dış açısı** denir.



(K, A, D doğrusal, K, B, C doğrusal)



(K, B, C doğrusal)

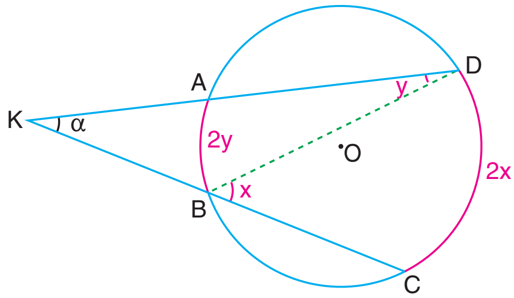


Şekildeki $\widehat{AKB}$ açıları dış açılardır.

Örnek

Çemberde bir dış açının ölçüsünün, gördüğü yaylardan büyük olanın ölçüsü ile küçük olanın ölçüsünün farkının yarısına eşit olduğunu gösterelim.

Çözüm



(K, A, D ile K, B, C noktaları doğrusal)

Şekilde BKD üçgeninde

$m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DKB}) + m(\widehat{KDB})$ ise

$x = \alpha + y$

$\alpha = x - y$ olur.

$\widehat{ADB}$ ve $\widehat{DBC}$ çevre açılar olduğundan

$m(\widehat{DBC}) = x$ ise $m(\overset{\frown}{CD}) = 2x$ ve

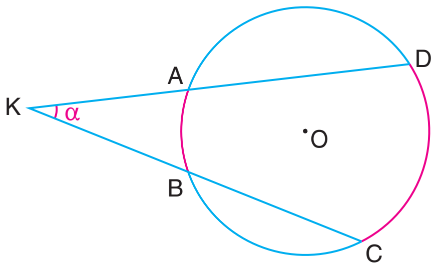
$m(\widehat{ADB}) = y$ ise $m(\overset{\frown}{AB}) = 2y$ bulunur.

Buradan $m(\overset{\frown}{CD}) - m(\overset{\frown}{AB}) = 2x - 2y = 2\cdot(x - y) = 2\cdot\alpha$ ise $\alpha = \frac{1}{2}\cdot[m(\overset{\frown}{CD}) - m(\overset{\frown}{AB})]$ olur.

SONUÇ

$\widehat{DKC}$ dış açı; $\overset{\frown}{AB}$ ve $\overset{\frown}{CD}$, $\widehat{DKC}$ açısının gördüğü yaylar olmak üzere

$m(\widehat{DKC}) = m(\widehat{AKB}) = \alpha = \frac{1}{2}\cdot[m(\overset{\frown}{CD}) - m(\overset{\frown}{AB})]$ dür.



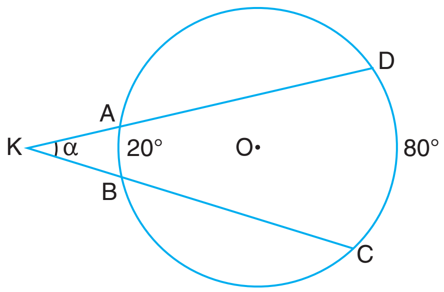
(K, A, D ile K, B, C noktaları doğrusal)

Örnek

Şekildeki O merkezli çemberde

$m(\overset{\frown}{AB}) = 20°$, $m(\overset{\frown}{CD}) = 80°$ olduğuna göre

$m(\widehat{AKB}) = \alpha$ kaç derecedir?



(K, A, D ile K, B, C noktaları doğrusal)

Çözüm

$m(\widehat{AKB}) = \alpha = \frac{1}{2}\cdot[m(\overset{\frown}{CD}) - m(\overset{\frown}{AB})] = \frac{1}{2}\cdot[80° - 20°] = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30°$ olur.

Örnek

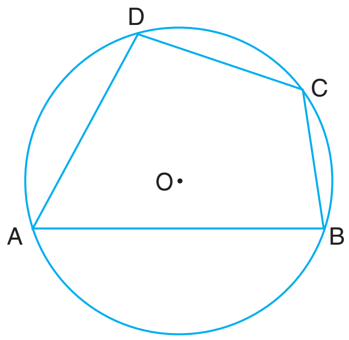
Yandaki şekilde ABCD dörtgeninin köşeleri çembere teğettir.

Buna göre

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180°$

$m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 180°$

olduğunu gösterelim.



Çözüm

Şekilde ADC ve ABC çevre açılar olduklarından

$m(\overset{\frown}{ADC}) = 2 \cdot m(\widehat{ABC})$

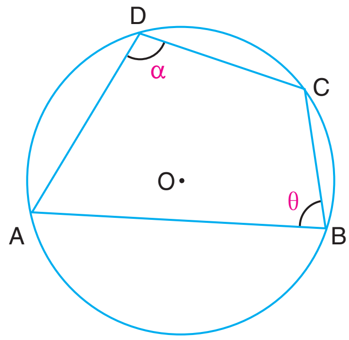
$= 2 \cdot \theta$

$m(\overset{\frown}{ABC}) = 2 \cdot m(\widehat{ADC})$

$= 2.\alpha$ dır.

$m(\overset{\frown}{ABC}) + m(\overset{\frown}{ADC}) = 360°$ olduğundan $2\alpha + 2\theta = 360°$ ise

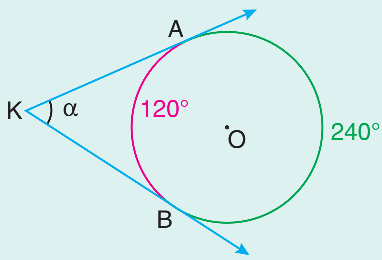
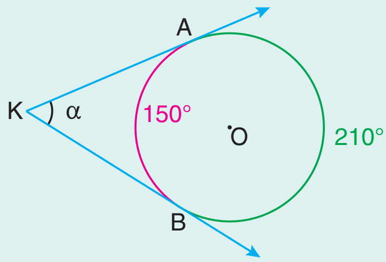
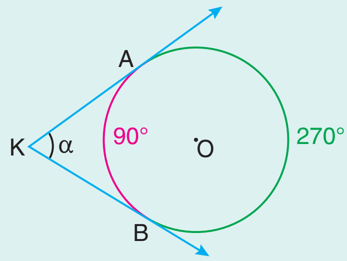
$\alpha + \theta = 180°$dir.



Benzer şekilde $m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180°$ olur.

ETKİNLİK

- Aşağıda [KA ve [KB, O merkezli her bir çembere sırası ile A ve B noktalarında teğettir. Her bir çemberin üzerindeki ölçülere göre $m(\widehat{AKB}) = \alpha$ değerlerini bulunuz.

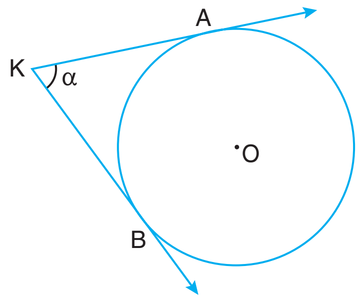
I.	II.	III.
		

- Bulduğunuz sonuçlara göre I, II ve III numaralı şekiller için sırası ile $\alpha + m(\overset{\frown}{AB})$ toplamını bulunuz.
- Elde edilen sonuçları karşılaştırınız.

SONUÇ

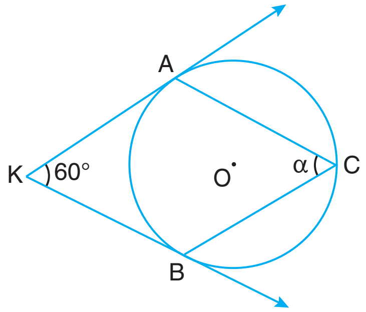
$[KA$ ve $[KB$, O merkezli çembere sırası ile A ve B noktalarında teğettir.

Bir dış açının her iki kolu çembere teğet ve $m(\widehat{AKB}) = \alpha$ olmak üzere $\alpha + m(\overset{\frown}{AB}) = 180°$dir.



Örnek

$[KA$ ve $[KB$, çembere sırası ile A ve B noktalarında teğettir. $m(\widehat{AKB}) = 60°$ olduğuna göre $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ kaç derecedir?



Çözüm

$m(\widehat{AKB}) + m(\overset{\frown}{AB}) = 180°$ ise

$60° + m(\overset{\frown}{AB}) = 180°$

$m(\overset{\frown}{AB}) = 120°$ olur.

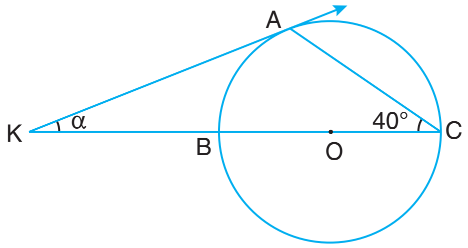
Buna göre

$$m(\widehat{ACB}) = \alpha = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

$$\alpha = \frac{120°}{2} = 60° \text{ bulunur.}$$

Örnek

Şekildeki O merkezli çemberde $[KA$, çembere A noktasında teğet ve $m(\widehat{ACB}) = 40°$, K, B, O ve C noktaları doğrusal olduğuna göre $m(\widehat{AKB}) = \alpha$ kaç derecedir?



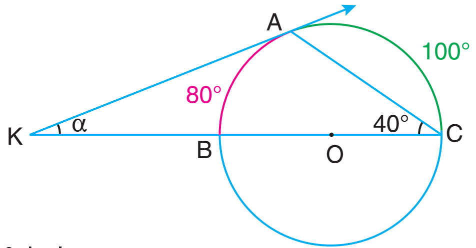
Çözüm

Şekilde $\widehat{ACB}$ çevre açı olduğundan

$m(\overset{\frown}{AB}) = 2 \cdot 40° = 80°$dir.

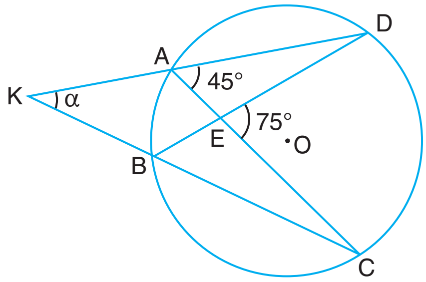
$[BC]$ çap olduğundan $m(\overset{\frown}{BAC}) = 180°$dir.

$m(\overset{\frown}{AC}) = 180° - 80° = 100°$ olur. Buna göre



$$m(\widehat{AKB}) = \alpha = \frac{1}{2} \cdot [m(\overset{\frown}{AC}) - m(\overset{\frown}{AB})] = \frac{1}{2} \cdot [100° - 80°] = 10° \text{ bulunur.}$$

Örnek



Şekildeki O merkezli çemberde K, A, D ile K, B, C noktaları doğrusal, $[AC]$ ve $[BD]$ nın kesişim noktası E, $m(\widehat{CED}) = 75°$ ve $m(\widehat{CAD}) = 45°$ olduğuna göre $m(\widehat{AKB}) = \alpha$ kaç derecedir?

Çözüm

$\widehat{CAD}$ çevre açı olduğundan

$m(\overset{\frown}{CD}) = 2 \cdot m(\widehat{CAD}) = 2 \cdot 45° = 90°$dir.

$\widehat{CED}$ iç açı olduğundan

$m(\widehat{CED}) = \frac{1}{2} \cdot [m(\overset{\frown}{CD}) + m(\overset{\frown}{AB})]$

$75° = \frac{1}{2} \cdot [90° + m(\overset{\frown}{AB})]$

$150° = 90° + m(\overset{\frown}{AB})$

$m(\overset{\frown}{AB}) = 60°$dir.

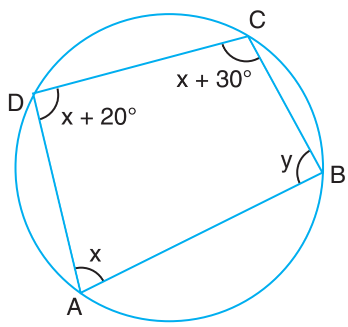
$\widehat{AKB}$ dış açı olduğundan

$m(\widehat{AKB}) = \alpha = \frac{1}{2} \cdot [m(\overset{\frown}{CD}) - m(\overset{\frown}{AB})]$

$= \frac{1}{2} \cdot [90° - 60°]$

$= 15°$ olur.

Örnek



Yandaki şekilde A, B, C ve D noktaları çember üzerindedir.

$m(\widehat{DAB}) = x$, $m(\widehat{ABC}) = y$, $m(\widehat{BCD}) = x + 30°$ ve $m(\widehat{CDA}) = x + 20°$

olduğuna göre $m(\widehat{ABC}) = y$ kaç derecedir?

Çözüm

$m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{BCD}) = 180°$ ise $x + x + 30° = 180°$ ise $2x = 150°$

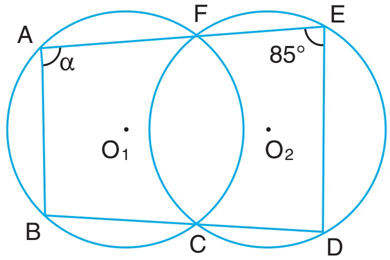
$x = 75°$dir.

$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{CDA}) = 180°$ ise $y + x + 20° = 180°$

$y + 75° + 20° = 180°$

$y = 85°$ olur.

Örnek

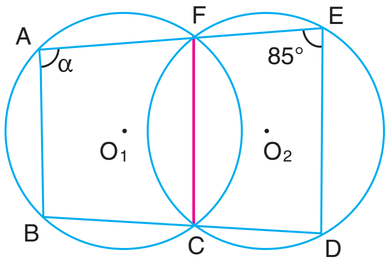


Şekilde O_1 ve O_2 merkezli iki çember C ve F noktalarında kesişmektedir. A, F, E ile B, C, D noktaları doğrusaldır.

ABCD dörtgen, A, B, C, D, E, F noktaları çember üzerinde ve

$m(\widehat{DEF}) = 85°$ olduğuna göre $m(\widehat{BAE}) = \alpha$ kaç derecedir?

Çözüm



$m(\widehat{DCF}) + m(\widehat{DEF}) = 180°$

$m(\widehat{DCF}) + 85° = 180°$dir.

$m(\widehat{DCF}) = 95°$ olup $m(\widehat{BCF}) + m(\widehat{DCF}) = 180°$

$m(\widehat{BCF}) + 95° = 180°$

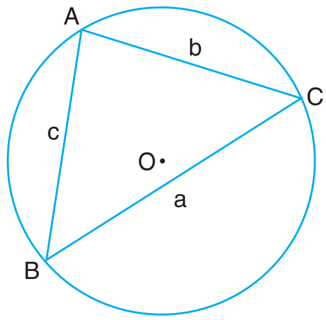
$m(\widehat{BCF}) = 85°$ olur.

ABCF kirişler dörtgeninde

$m(\widehat{BAF}) + m(\widehat{BCF}) = 180°$ olduğundan $\alpha + 85° = 180°$

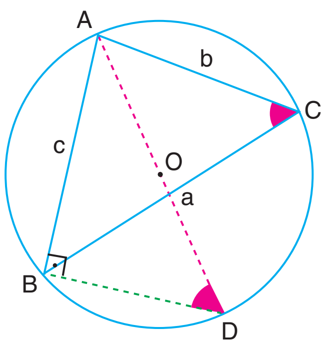
$\alpha = 95°$ bulunur.

Sinüs Teoreminin Çevrel Çemberin Yarıçapı ile İlişkisi



Bir üçgenin köşelerinden geçen çembere, bu üçgenin **çevrel çemberi** denir. Herhangi bir ABC üçgeninde çevrel çemberin yarıçapının uzunluğu r olmak üzere

$\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = 2r$ dir.



O merkezli çemberde $m(\widehat{ACB}) < 90°$ ve $|AD| = 2r$ olsun.

Aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşit olduğundan

$m(\widehat{C}) = m(\widehat{D})$ dür.

Çapı gören çevre açı 90° olduğundan $m(\widehat{ABD}) = 90°$dir.

ABD dik üçgeninde $\sin\widehat{D} = \dfrac{|AB|}{|AD|}$ ise $\sin\widehat{D} = \dfrac{c}{2r}$ ise $\dfrac{c}{\sin\widehat{D}} = 2r$

olur. $m(\widehat{C}) = m(\widehat{D})$ olduğundan $\dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = 2r$ bulunur.

Benzer şekilde $\dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = 2r$ ve $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = 2r$ eşitlikleri elde edilir.

Buna göre $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = 2r$ dir.

Örnek

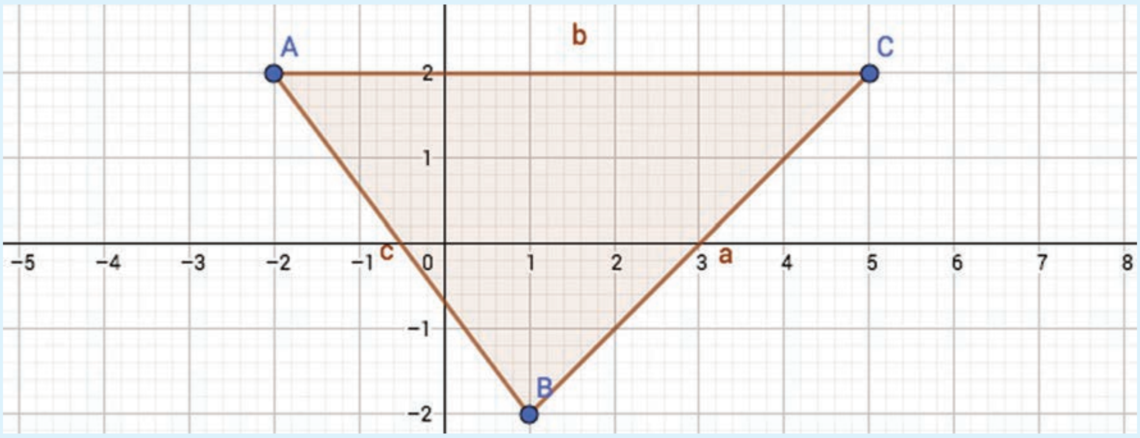
Çevrel çember yarıçapının uzunluğu 8 cm olan ABC üçgeninde A açısının ölçüsü 30° olduğuna göre A açısının karşısındaki kenarın uzunluğunu bulalım.

Çözüm

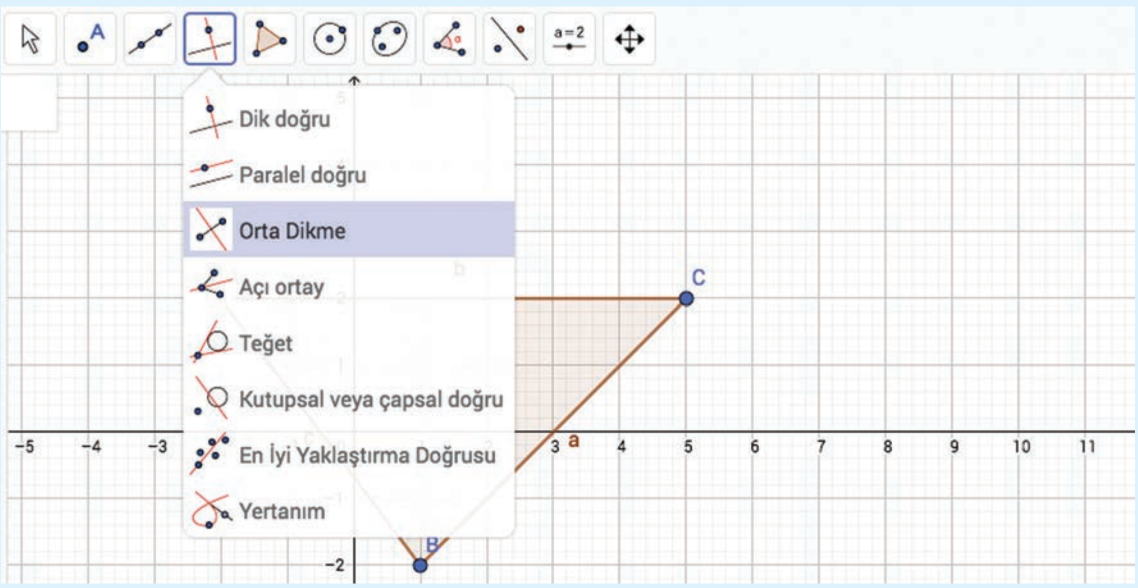
A açısının karşısındaki kenarın uzunluğu a olsun.

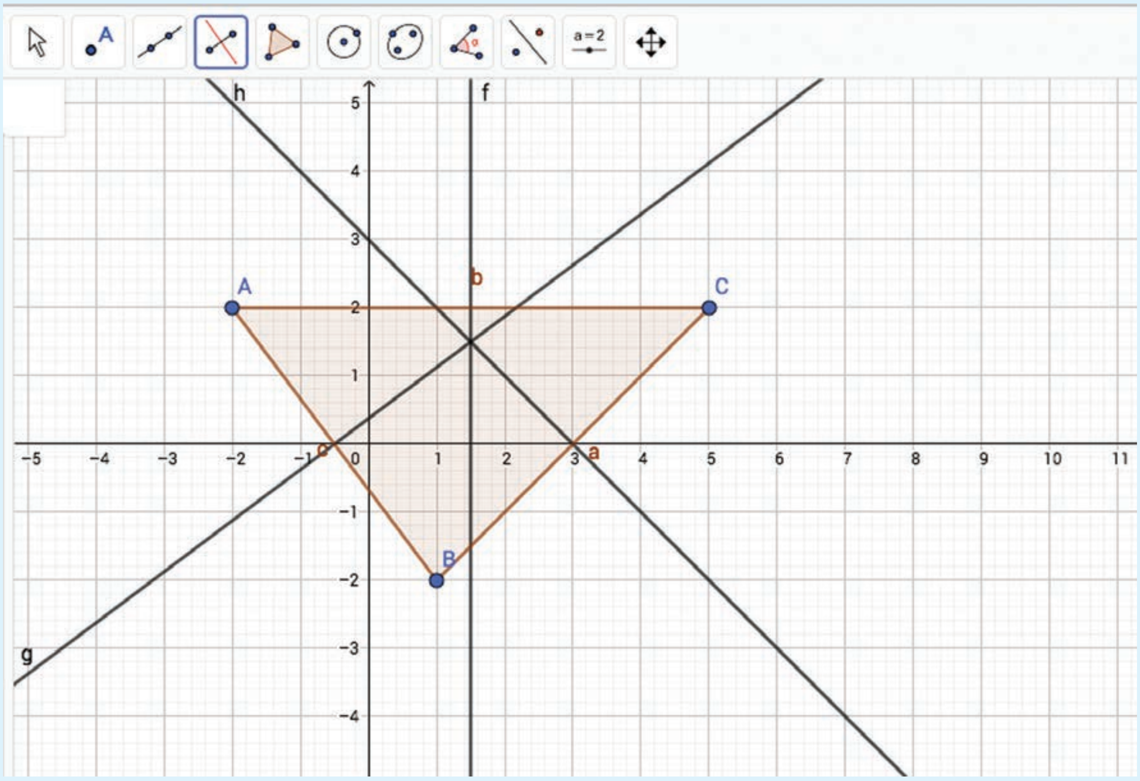
r yarıçap olmak üzere $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = 2r$ ise $\dfrac{a}{\sin 30°} = 2 \cdot 8$ ise $\dfrac{a}{\frac{1}{2}} = 16$ ise $a = 8$ cm olur.

Dinamik Matematik ve Geometri Programından yararlanarak bir üçgen oluşturalım.

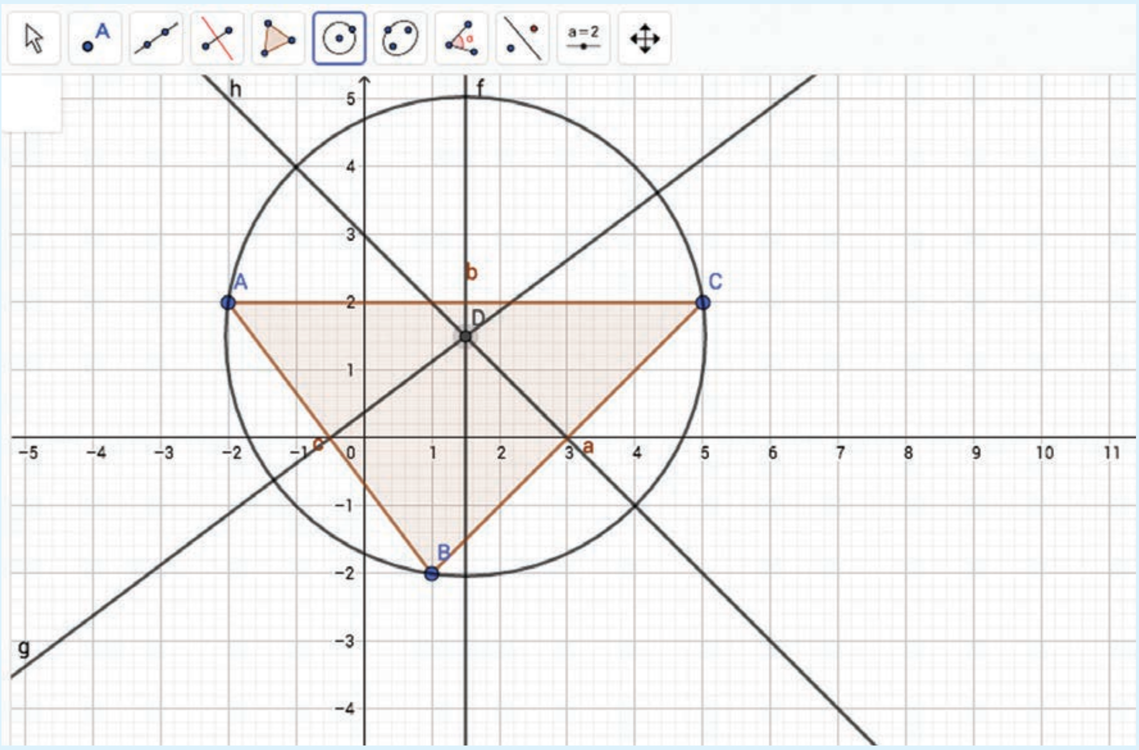


Orta dikme menüsünü kullanarak çizdiğimiz üçgenin diklik merkezini bulalım (Bunun için önce orta dikme menüsüne tıklayıp ardından üçgenin kenarlarının üzerine tıkladığımızda dikmeler çizilecektir.).

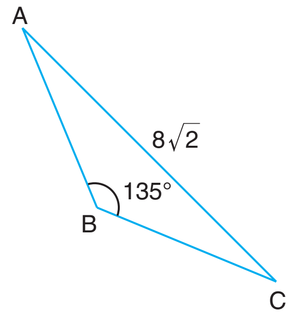




• Üçgenin diklik merkezi aynı zamanda çevrel çemberinin de merkezi olduğundan bu noktayı merkez olarak seçerek çevrel çemberi oluşturabiliriz.



Örnek



ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) = 135°, |AC| = 8\sqrt{2}$ cm olduğuna göre ABC üçgeninin çevrel çemberinin çapının uzunluğu kaç cm dir?

Çözüm

Çemberin çapının uzunluğu 2r olmak üzere ABC üçgeninde

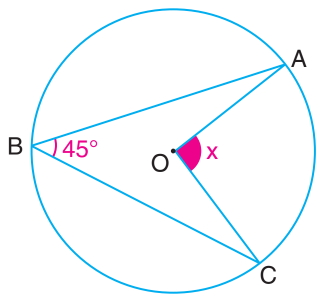
$$\frac{|AC|}{\sin\widehat{B}} = 2r \text{ ise } \frac{8\sqrt{2}}{\sin 135°} = 2r \text{ ise } \frac{8\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2r$$

$2r = 16$ cm bulunur.

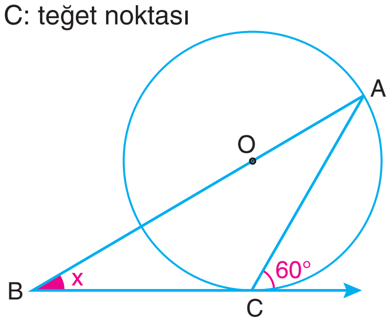
UYGULAYALIM 5-2

1. Aşağıdaki O merkezli çemberlerin üzerlerinde verilenlere göre x değerlerini bulunuz.

a)

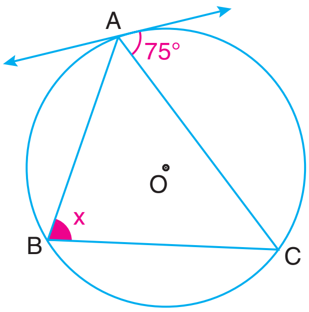


b) C: teğet noktası

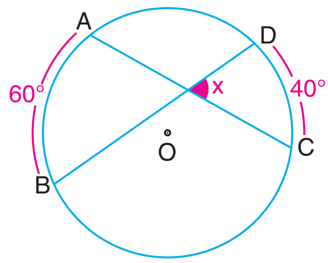


B, O, A doğrusal

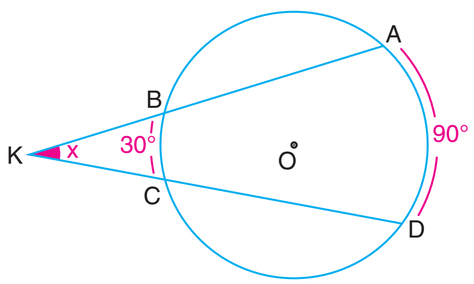
c) A: teğet noktası



ç)

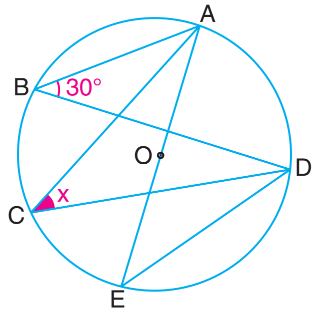


d)



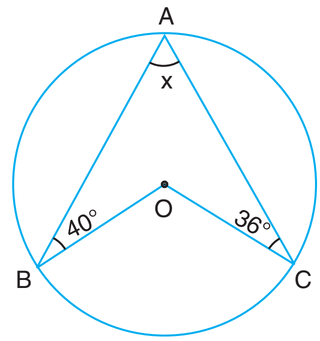
K, B, A ile K, C, D doğrusal

e)

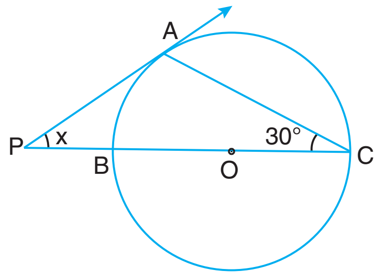


A, O, E doğrusal

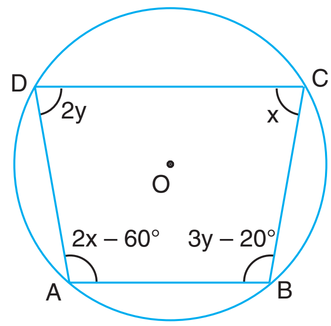
2. Şekildeki O merkezli çemberde $m(\widehat{ABO}) = 40°$ ve $m(\widehat{ACO}) = 36°$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC}) = x$ kaç derecedir?



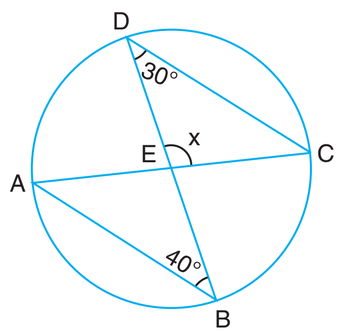
3. Şekildeki O merkezli çemberde [PA çembere A noktasında teğet, $m(\widehat{ACB}) = 30°$, P, B, O ve C doğrusal olduğuna göre $m(\widehat{APB}) = x$ kaç derecedir?



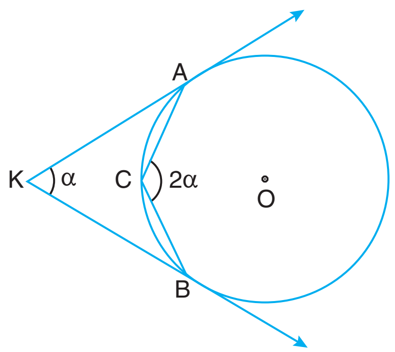
4. Yandaki ABCD dörtgeninin köşeleri çember üzerindedir. $m(\widehat{A}) = 2x - 60°$, $m(\widehat{B}) = 3y - 20°$, $m(\widehat{C}) = x$, $m(\widehat{D}) = 2y$ olduğuna göre $x + y$ kaç derecedir?



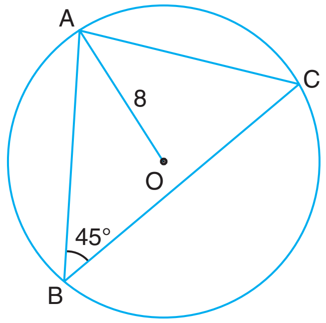
5. Yandaki şekilde $[AC] \cap [BD] = \{E\}$, $m(\widehat{CDB}) = 30°$, $m(\widehat{ABD}) = 40°$ olduğuna göre $m(\widehat{CED}) = x$ kaç derecedir?



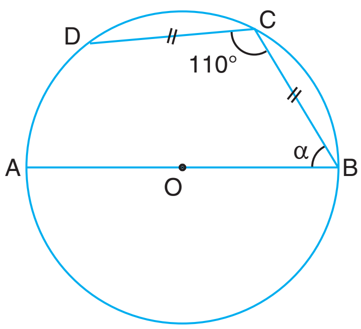
6. Yandaki şekilde $[KA$, O merkezli çembere A noktasında, $[KB$ ise çembere B noktasında teğet, C noktası çember üzerinde, $m(\widehat{AKB}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ACB}) = 2\alpha$ olduğuna göre α kaç derecedir?



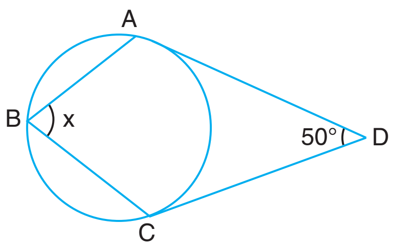
7. Şekilde $m(\widehat{ABC}) = 45°$, O çemberin merkezi, $|AO| = 8$ cm olduğuna göre O noktasının $[AC]$ na uzaklığı kaç cm dir?



8. Şekildeki O merkezli çemberde $|BC| = |CD|$, $m(\widehat{BCD}) = 110°$, $m(\widehat{ABC}) = \alpha$, $[AB]$ çemberin çapı ise α kaç derecedir?



9. Şekilde $[AD]$ ve $[CD]$ sırası ile A ve C noktalarında çembere teğettir. $m(\widehat{ADC}) = 50°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC}) = x$ kaç derecedir?

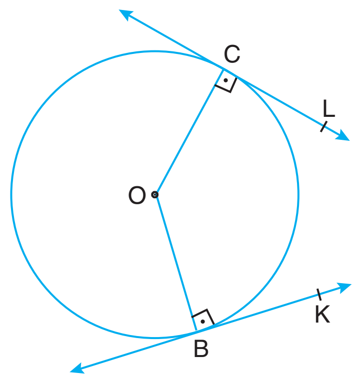


5.3. ÇEMBERDE TEĞET

5.3.1. Çemberde Teğetin Özellikleri

Çemberin merkezi ile teğetin değme noktasını birleştiren doğru, teğete diktir.

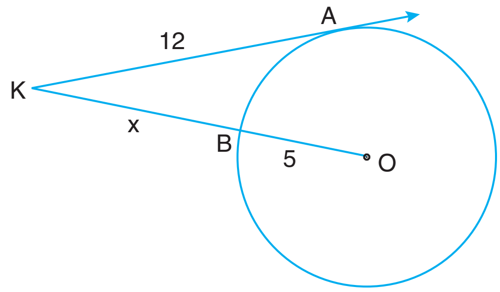
Şekilde $[OC] \perp CL$, $[OB] \perp BK$ tir.



Örnek

Şekildeki O merkezli çemberde, [KA çembere A noktasında teğet ve K, B, O noktaları doğrusaldır.

$|KA| = 12$ cm ve $|BO| = 5$ cm olduğuna göre $|BK| = x$ kaç cm dir?



Çözüm

[KA teğet ve [AO] yarıçap olduğundan

$[KA \perp [AO]$ ve $|BO| = |AO| = 5$ cm dir.

KAO dik üçgeninde

$|KO|^2 = |AO|^2 + |KA|^2$

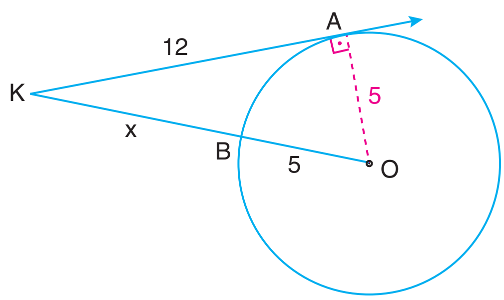
$|KO|^2 = 5^2 + 12^2$

$|KO|^2 = 169$

$|KO| = 13 \Rightarrow x + 5 = 13$

$x = 13 - 5$

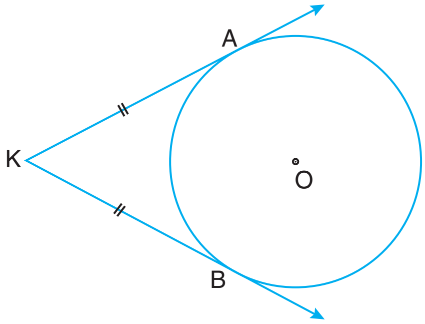
$x = 8$ olur.



Çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları birbirine eşittir.

[KA, çembere A noktasında; [KB, çembere B noktasında teğet olmak üzere

$|AK| = |BK|$ dur.



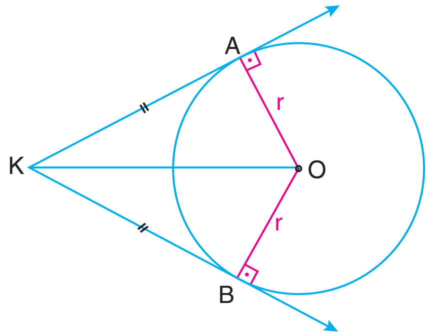
KAO ve KBO dik üçgenlerinde Pisagor teoremine göre

$|AK|^2 + |AO|^2 = |OK|^2$ ise $|AK|^2 + r^2 = |OK|^2 \cdots$ (A)

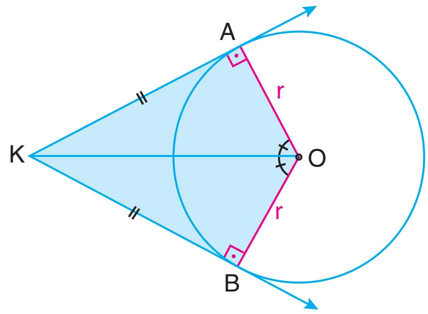
$|BK|^2 + |BO|^2 = |OK|^2$ ise $|BK|^2 + r^2 = |OK|^2 \cdots$ (B)

(A) ve (B)'den $|AK|^2 + r^2 = |BK|^2 + r^2$ ise

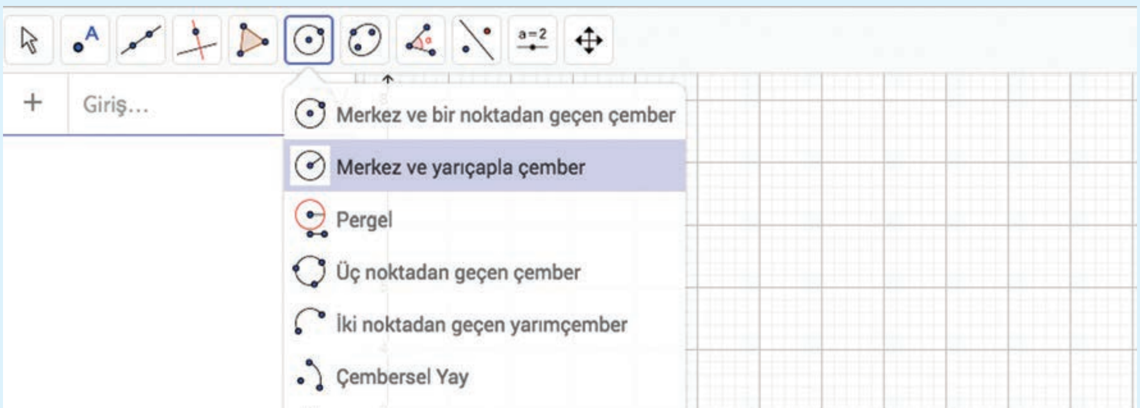
$|AK| = |BK|$ olur.



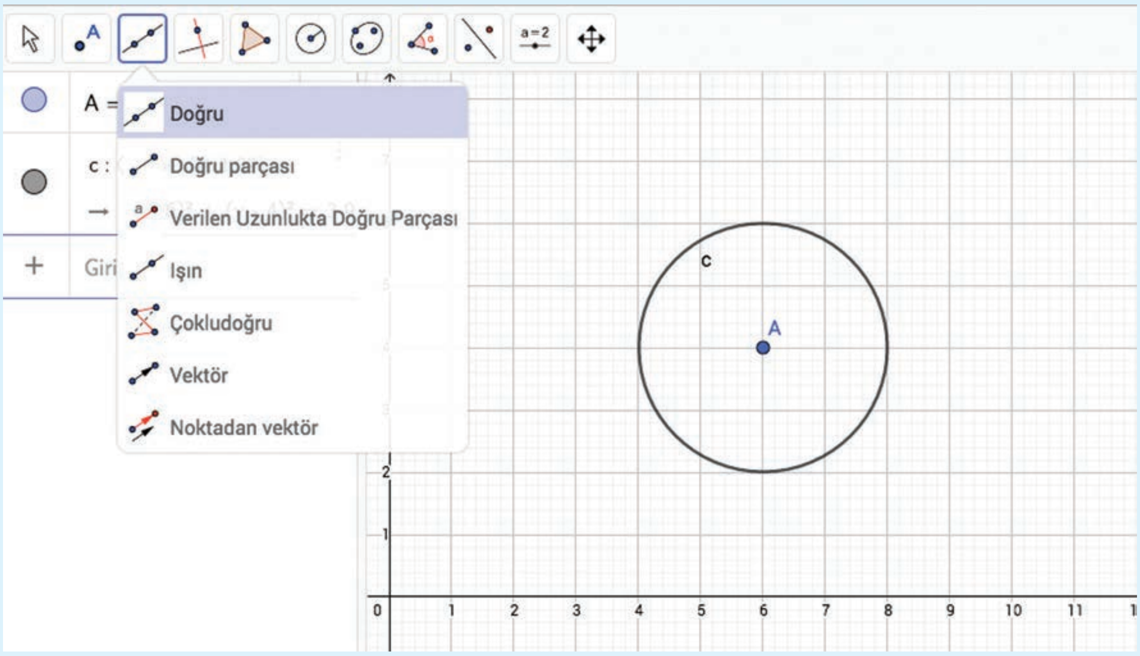
Şekilde $\widehat{KAO} \cong \widehat{KBO}$ eş üçgendir.

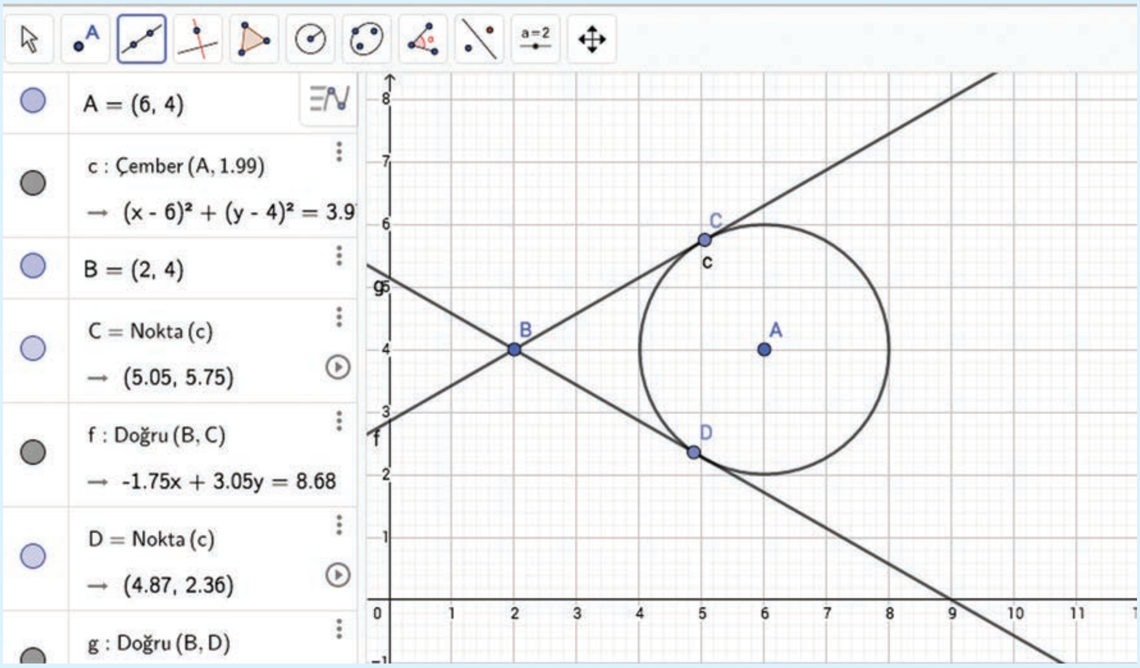


Dinamik Matematik ve Geometri Programından yararlanarak oluşturacağımız çemberin merkezinin koordinatlarını ve yarıçapını yazarak çemberi oluşturalım.

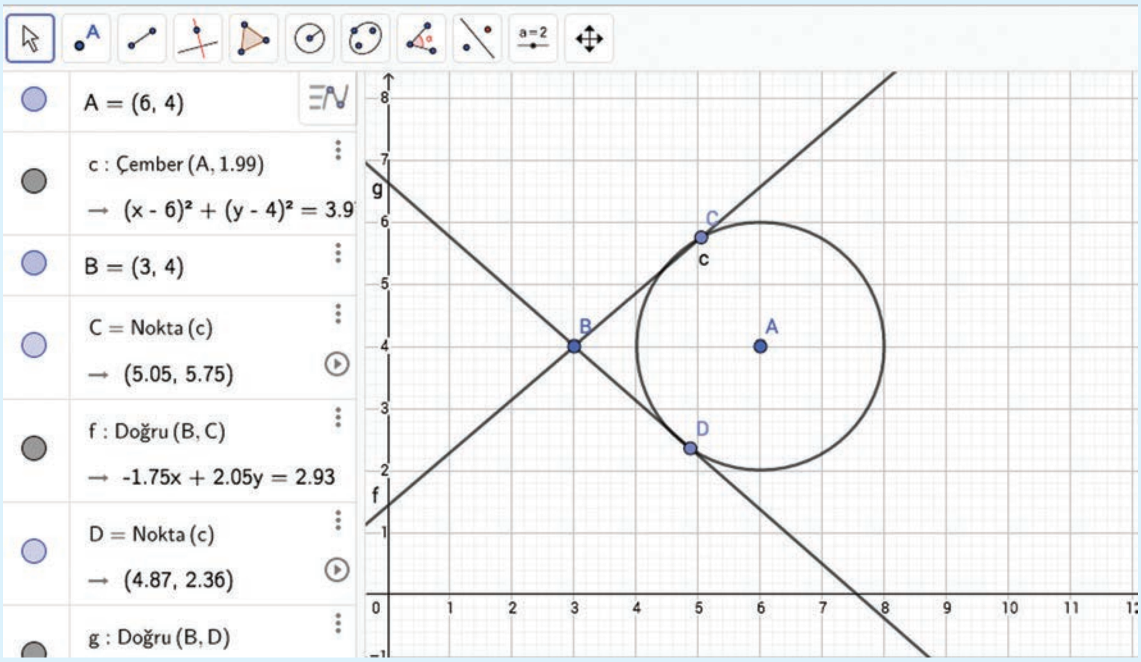


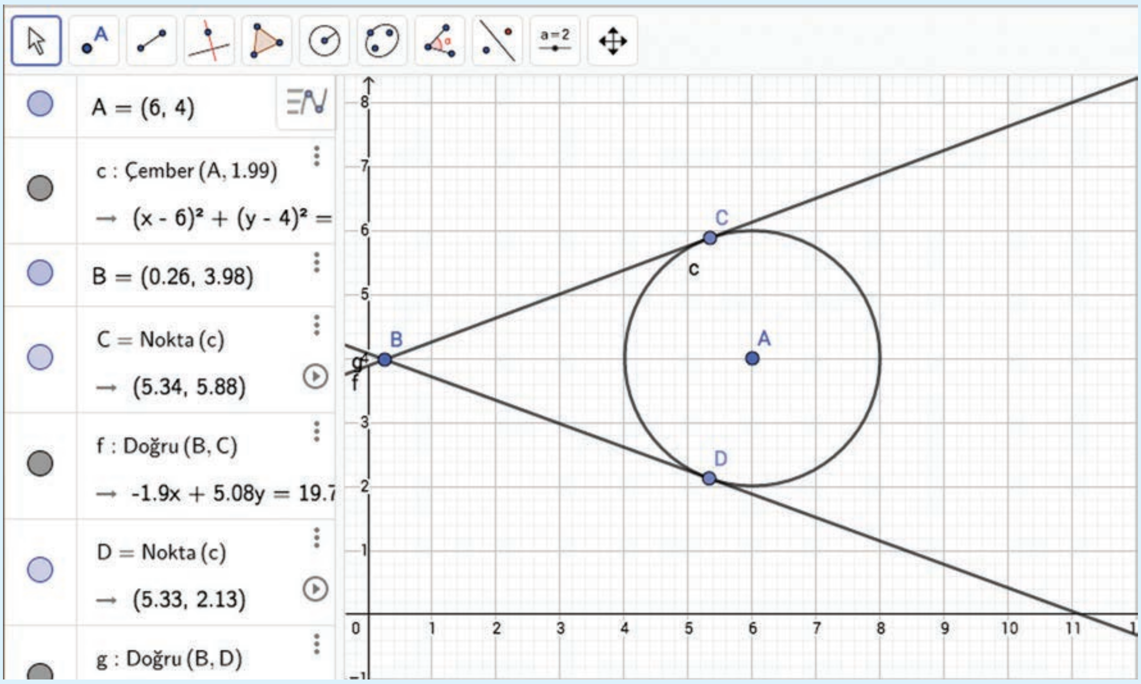
Doğru menüsünü kullanarak çembere teğet ve birbiriyle kesişen iki doğru çizelim.





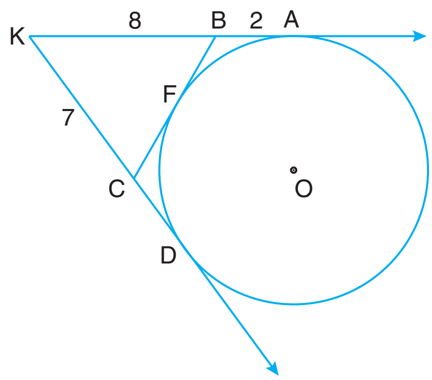
Doğruların kesişim noktasını ileri geri hareket ettirerek teğet noktalarıyla arasında kalan doğru parçalarının uzunluklarının değişimini gözlemleyelim.





Örnek

Şekildeki A, F ve D noktaları çembere teğet noktalar, K, B, A ile K, C, D doğrusaldır.
$|AB| = 2$ cm, $|KB| = 8$ cm, $|KC| = 7$ cm olduğuna göre $|BC|$ kaç cm dir?



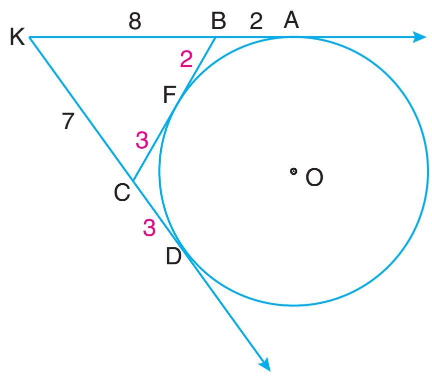
Çözüm

$|AB| = |BF| = 2$ cm olur. $|KA| = |KD|$ olduğundan

$8 + 2 = 7 + |CD|$ ise $|CD| = 3$ cm dir.

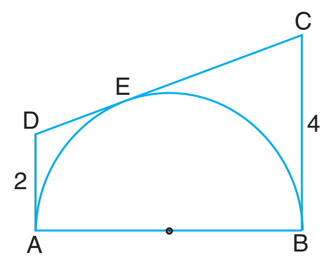
D ve F teğet noktalar olduğundan $|CF| = |CD| = 3$ cm dir.

$$|BC| = |BF| + |CF|$$
$$= 2 + 3$$
$$= 5 \text{ cm bulunur.}$$

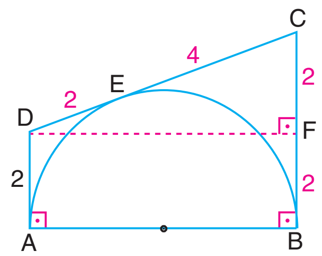


Örnek

$[AB]$ çaplı yarım çemberde $[AD]$, $[CD]$ ve $[BC]$ çembere sırasıyla A, E ve B noktalarında teğettir. $|AD| = 2$ cm, $|BC| = 4$ cm olduğuna göre $|AB|$ kaç cm dir?



Çözüm



Şekilde $|AD| = |DE|$ dur.

$|DE| = 2$ cm, $|CB| = |CE|$ olduğundan $|CE| = 4$ cm,

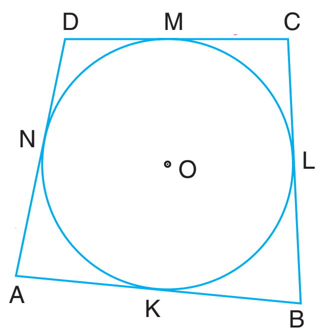
$|CF| = |BC| - |BF| = 4 - 2 = 2$ cm dir.

CFD dik üçgeninde $|CD|^2 = |CF|^2 + |DF|^2$

$$6^2 = 2^2 + |DF|^2$$
$$32 = |DF|^2$$
$$|DF| = 4\sqrt{2} \text{ cm olur.}$$

$|DF| = |AB|$ olduğundan $|AB| = 4\sqrt{2}$ cm dir.

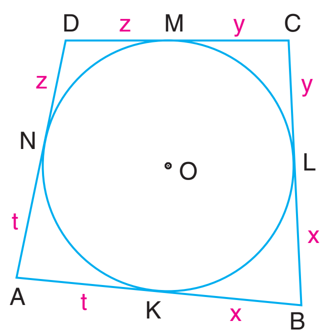
Örnek



Yandaki şekilde O merkezli çember ABCD dörtgenine K, L, M, N noktalarında teğettir.

Buna göre ABCD dörtgeninde $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



Çemberin dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları birbirine eşit olduğuna göre

$|KB| = |BL| = x, |LC| = |CM| = y,$

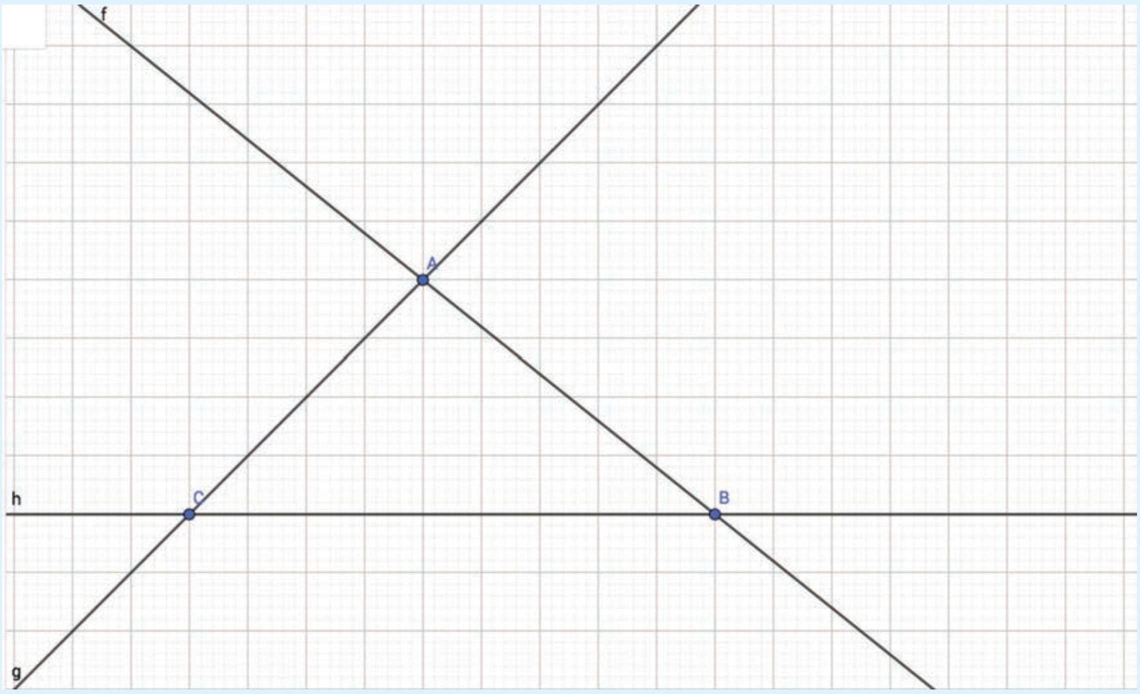
$|MD| = |DN| = z$ ve $|NA| = |AK| = t$ dir.

$|AB| + |CD| = x + y + z + t$

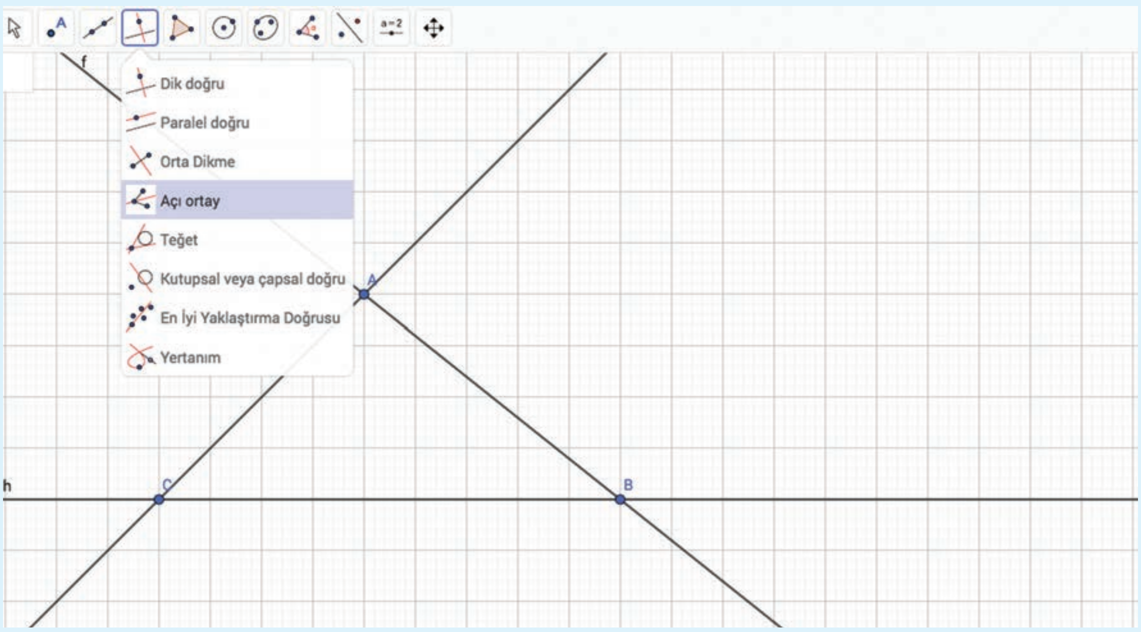
$|AD| + |BC| = x + y + z + t$ olduğundan

$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ dur.

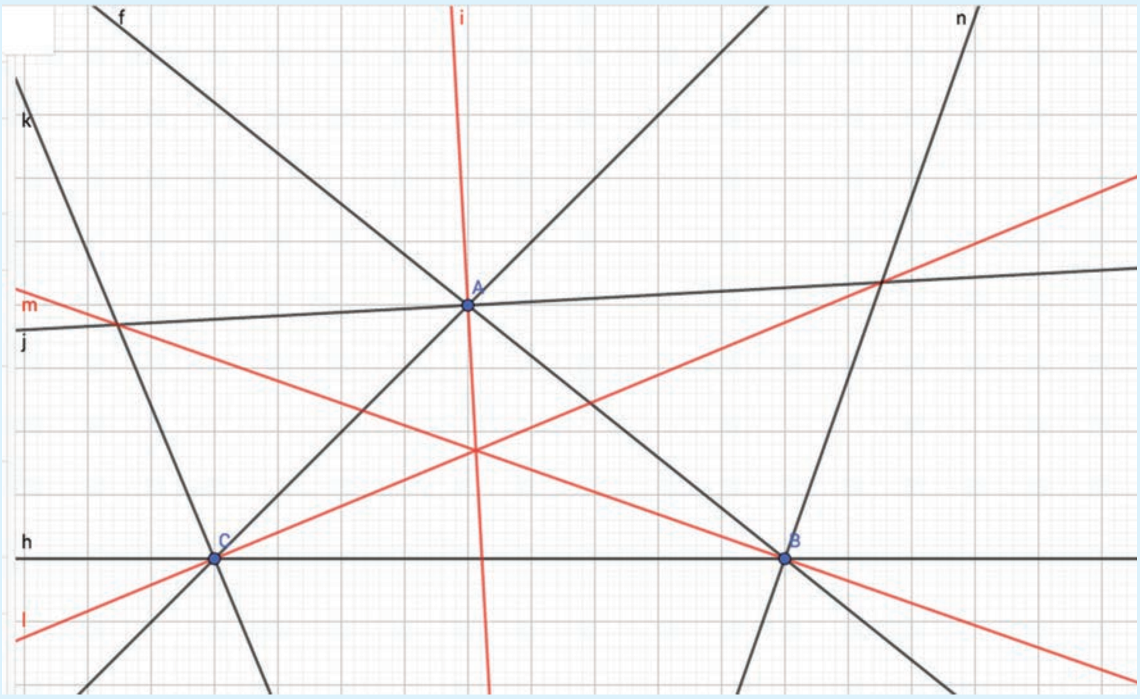
Dinamik Matematik ve Geometri Programından yararlanarak doğru çizimi menüsünü kullanarak bir üçgen oluşturalım.



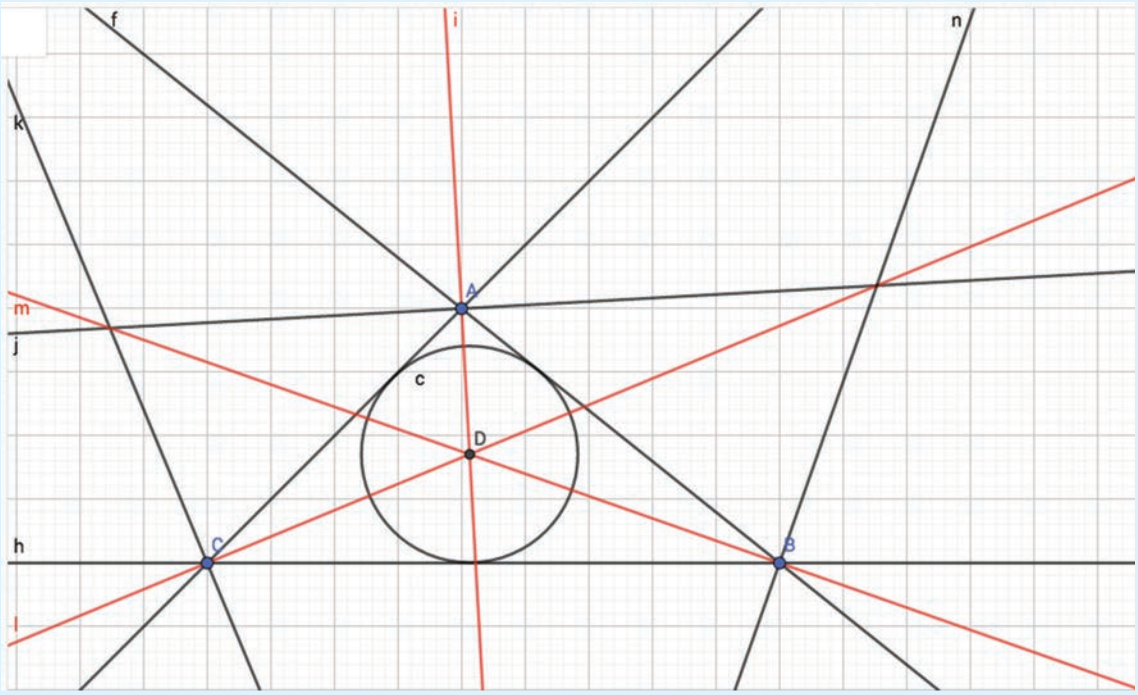
Açıortay menüsünü kullanarak üçgenin iç açıortaylarını oluşturalım.



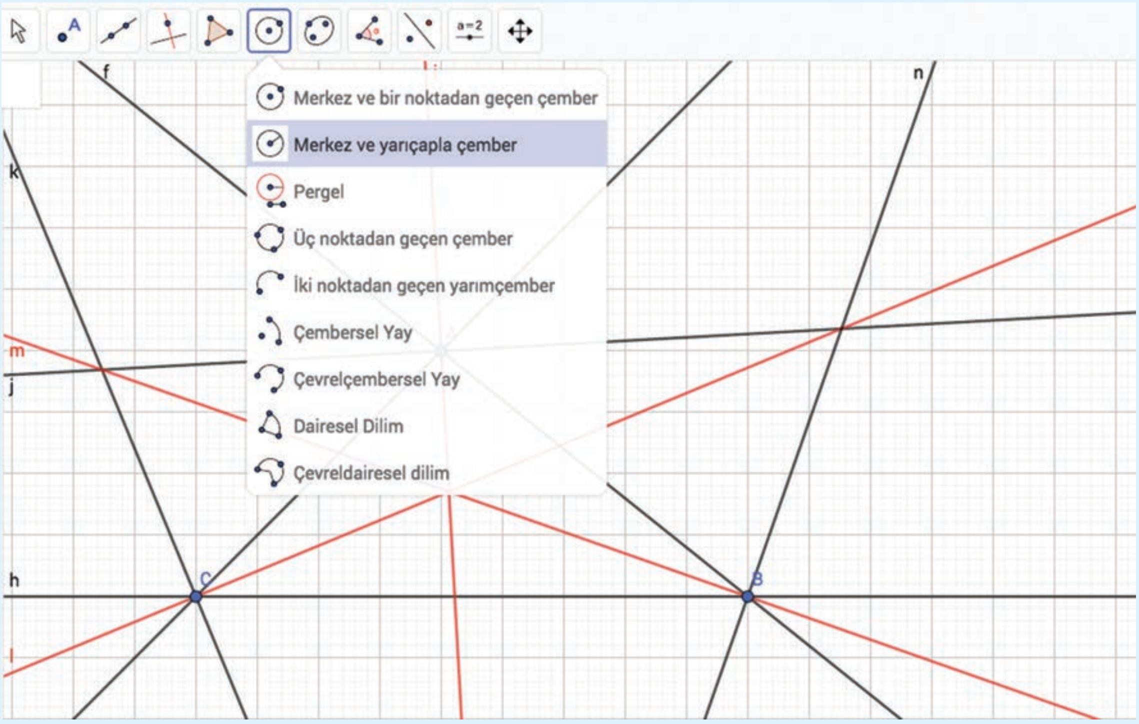
Üçgenin iç açıortaylarının kesişim noktası iç teğet çemberin merkezi olduğundan bu noktayı merkez olarak seçerek iç teğet çemberi oluşturalım.

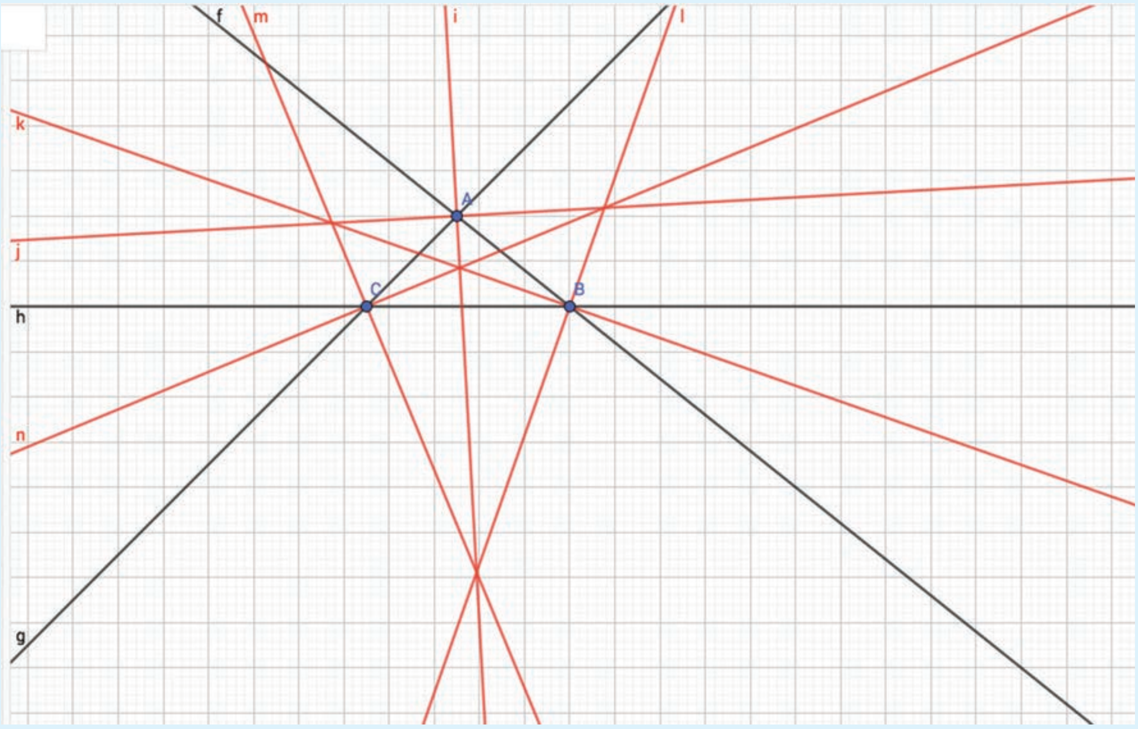


Üçgenin dış açıortaylarını oluşturalım.

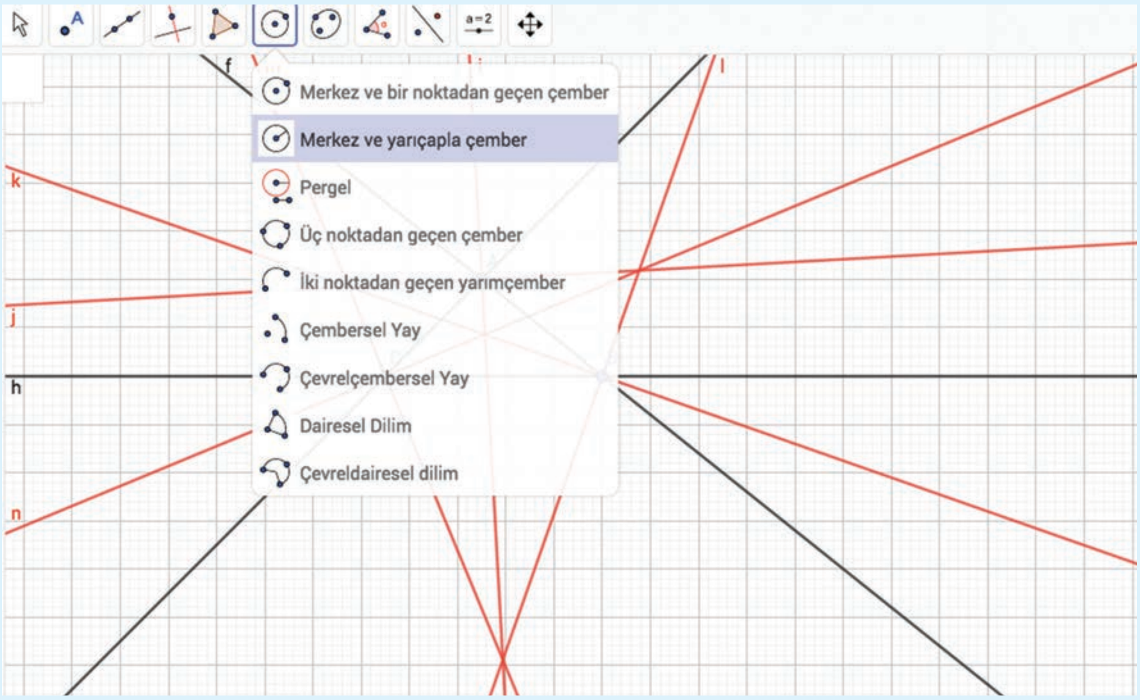


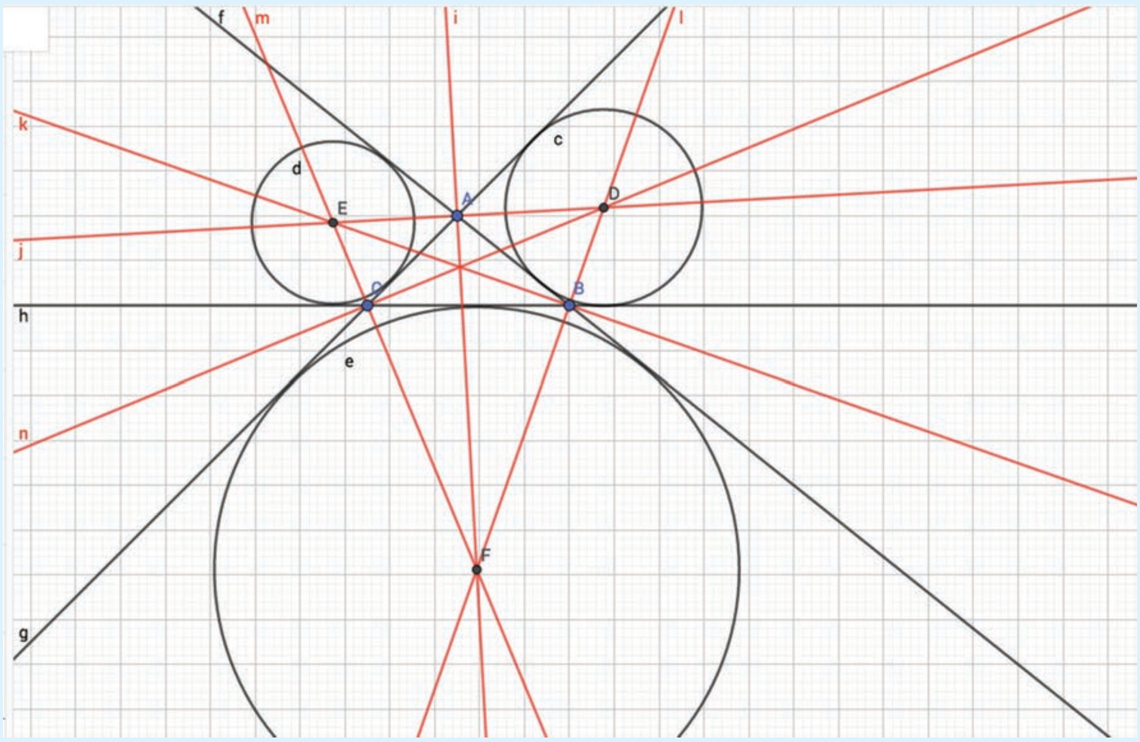
Dışteğet çember oluşturmak için aşağıdaki menüyü takip edelim.





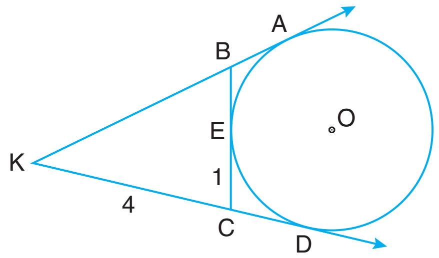
Dış açıortayların kesişim noktası dışteğet çemberin merkezi olduğundan bu noktaları merkez olarak seçerek dış teğet çemberleri oluşturalım.



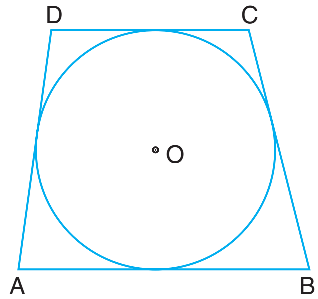


UYGULAYALIM 5-3

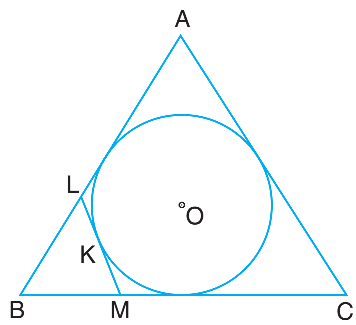
1. Yandaki O merkezli çembere [KA, A noktasında; [KD, D noktasında; [BC], E noktasında teğettir. |CE| = 1 cm ve |CK| = 4 cm olduğuna göre |KA| kaç cm dir?



2. ABCD ikizkenar yamuğunun kenarları O merkezli çembere teğettir. |CD| = 4 cm ve |AB| = 6 cm, [AB] // [CD] olduğuna göre çemberin yarıçapının uzunluğu kaç cm dir?

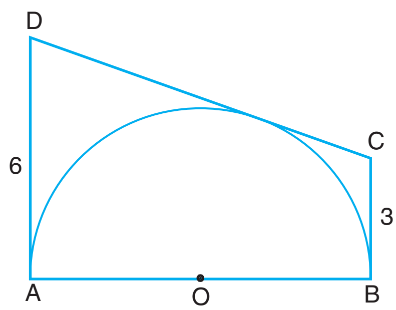


3. Şekildeki O merkezli çember ABC eşkenar üçgeninin iç teğet çemberidir. [LM], K noktasında çembere teğet, A, L, B ve B, M, C doğrusaldır. ABC üçgeninin çevresinin uzunluğu 36 cm olduğuna göre BML üçgeninin çevresinin uzunluğu kaç cm dir?



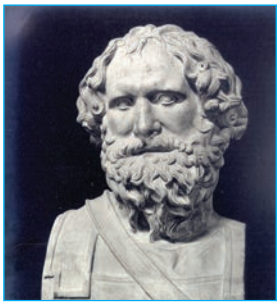
4. Yandaki şekilde [AD], [CD] ve [BC]; O merkezli çembere teğet ve [AB], O merkezli çemberin çapıdır.

|AD| = 6 cm ve |BC| = 3 cm olduğuna göre çemberin yarıçapının uzunluğu kaç cm dir?



5.4. DAİRENİN ÇEVRESİ VE ALANI

Sicilya Adası'nda doğan Yunan Arşimed (Archimedes); matematikçi, fizikçi, astronom, mühendis ve filozoftur. Bilime en büyük katkısı suyun kaldırma kuvvetini bulmasıdır. Geometriye yaptığı en büyük katkılardan birisi bir kürenin yüzey alanını ve hacmini veren formülü bulmasıdır. Bir dairenin alanının, tabanı bu dairenin çevre uzunluğuna, yüksekliği ise bu dairenin yarıçap uzunluğuna eşit olan bir üçgenin alanına eşit olduğunu kanıtlamıştır.



Arşimed
(M.Ö. 287-212)

Bir dairenin çevre uzunluğunun çapına bölümü π (pi) sabit sayısını verir.

$\pi = 3,14159265\cdots$ dir. π sayısı yaklaşık 3,14 olarak alınır. π irrasyonel sayısının tam kısmı ve ondalık kısmının ilk iki basamağı alınarak her yılın 3. ayının 14. günü π etkinlikleri olarak kutlanır.

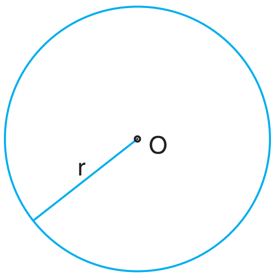


Kaynakça: Ana Britannica Ansiklopedisi.

5.4.1. Dairenin Çevresi ve Alanı

Dairenin Çevresi

Yarıçapının uzunluğu r birim olan bir dairenin çevresinin uzunluğu $2\pi \cdot r$ birimdir.



Örnek

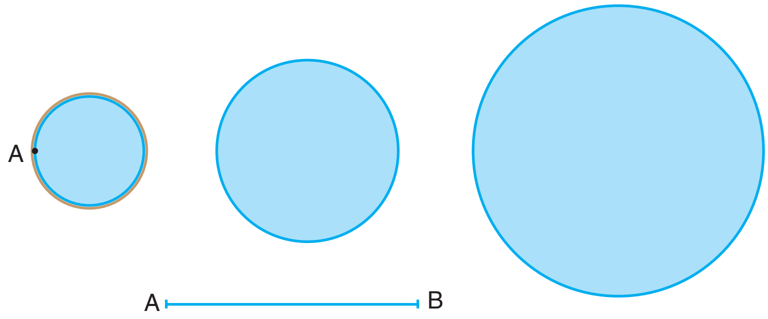
Çevre uzunluğu 24π cm olan dairenin yarıçapının uzunluğu kaç cm dir?

Çözüm

Çevre uzunluğu $= 2\pi r$ ise $24\pi = 2\pi r$ ise $r = 12$ cm dir.

ETKİNLİK

Araç gereç: Çap uzunlukları sırası ile 6 cm, 10 cm, 16 cm olan daire şeklinde karton, ip, makas, cetvel



- 6 cm çaplı dairenin kenarında bir nokta belirleyerek noktayı işaretleyiniz. Bu noktayı A noktası olarak isimlendiriniz.
- A noktasına ipin ucunu sabitleyerek ipi dairenin çevresine bir kere gergin biçimde sarınız.
- İpi A noktasına gelen noktadan kesiniz.
- Daireye sarılan ipi açarak cetvelle ipin uzunluğunu cm cinsinden ölçerek dairenin çevre uzunluğunu bulunuz.
- Her bir dairenin çevre uzunluğunu, kendi çapının uzunluğuna hesap makinesi kullanarak bölünüz.
- Aynı işlemleri diğer dairelerde de uygulayarak elde edilen değerleri aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerlere yazınız.

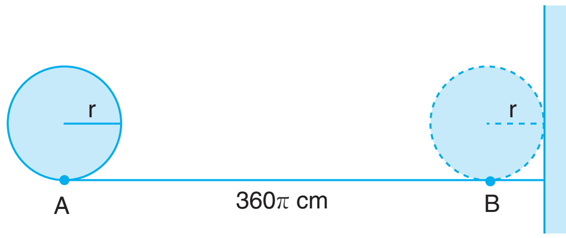
Daire	Dairenin çevresi	Dairenin çapı (R)	$\frac{Ç}{R}$
1		6	
2		10	
3		16	

- Bulduğunuz sonuçları karşılaştırınız.

Örnek

A noktasından yuvarlanmaya başlayan r yarıçaplı bir daire, 5 tam dönme yaparak şekildeki gibi B noktasında durmuştur.

$|AB| = 360\pi$ cm olduğuna göre dairenin yarıçapının uzunluğu kaç cm dir?



Çözüm

Daire bir tam dönme yaptığında $2\pi r$ cm yol alır. 5 tam dönme sonunda $5 \cdot 2\pi r$ kadar yol alır.

$|AB| = 5 \cdot 2\pi r$

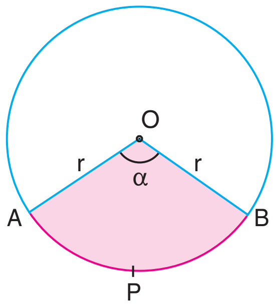
$360\pi = 10\pi r$

$r = 36$ cm olur.

Yandaki O merkezli dairenin yarıçapının uzunluğu r,

$m(\widehat{AOB}) = \alpha$ olmak üzere

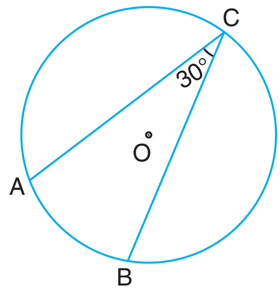
$\overset{\frown}{APB}$ yayının uzunluğu, $|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$ dir.



Örnek

O merkezli çemberin yarıçapının uzunluğu 6 cm uzunluğundadır.

$m(\widehat{ACB}) = 30°$ olduğuna göre $|\overset{\frown}{AB}|$, kaç π cm dir?



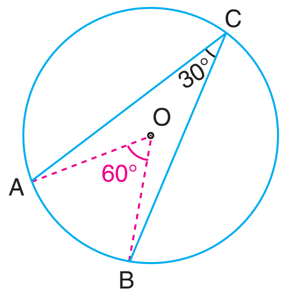
Çözüm

$m(\widehat{AOB}) = 2 \cdot m(\widehat{ACB})$

$m(\widehat{AOB}) = 2 \cdot 30° = 60°$dir.

$|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \dfrac{60°}{360°} = 2\pi \cdot 6 \cdot \dfrac{1}{6}$

$= 2\pi$ cm bulunur.



Örnek

Bir saat kulesindeki saatin akrebinin uzunluğu 36 cm dir. Bu akrebin ucu 1 saatte kaç π cm yol alır?



Çözüm

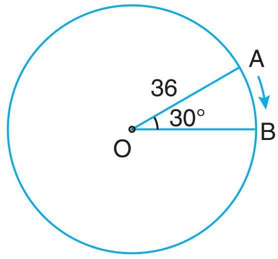
12 saatte akrep 360° dönmüştür. Akrebin 1 saatteki dönüşünü bulmalıyız.

12 saat ↘↗ 360°

1 saat ↗↘ x

1 saatte x.12 = 1.360°

x = 30° döner.



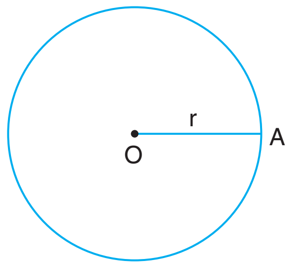
30°lik yayın uzunluğu, $|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \dfrac{30°}{360°} = 2\pi \cdot 36 \cdot \dfrac{30°}{360°}$

$= 2\pi \cdot 3$

$= 6\pi$ cm bulunur.

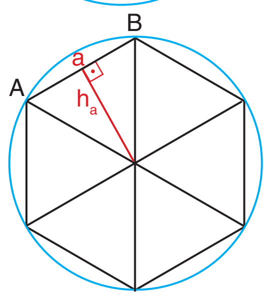
Dairenin Alanı

Bir çemberin kendisi ile iç bölgesinin birleşimine **daire** denir.



Şekildeki O merkezli, r yarıçaplı çember ve iç bölgesinin oluşturduğu dairenin merkezi O, yarıçapı ise r dir.

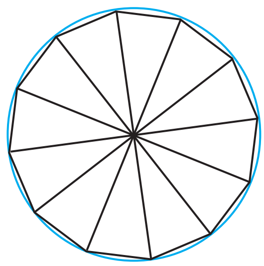
Bir dairenin içine ikişer köşesi çember üzerinde, birer köşeleri çemberin merkezinde olacak şekilde eş üçgenler çizelim.



Eş üçgenlerin bir tanesinin a kenarına ait yüksekliği h_a ile gösterelim.

Bu üçgenin alanı $\dfrac{|AB| \cdot h_a}{2}$ olur.

Buradaki üçgenlerin sayısına n dersek bütün üçgenlerin alanlarının toplamı $n \cdot \dfrac{|AB| \cdot h_a}{2}$ olacaktır.

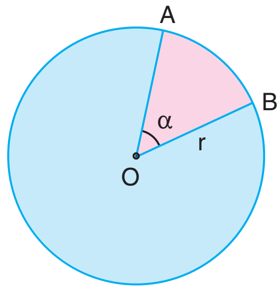


n sayısını yeteri kadar artırdığımızda bu üçgenlerin taban uzunluklarının toplamı çemberin çevresine eşit ve yükseklikleri yarıçap uzunluğuna eşit olacaktır.

Yani $n \cdot |AB| = 2\pi r$ ve $h_a = r$ olmak üzere dairenin alanı

$$n \cdot \frac{|AB| \cdot h_a}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2 \text{ olur.}$$

Bir dairede herhangi bir yayın ve bu yayın uç noktalarını dairenin merkezi ile birleştiren iki yarıçapı arasında kalan bölgeye **daire dilimi** denir.



r yarıçaplı bir dairenin alanı $\pi . r^2$ bağıntısı ile hesaplanır. $m(\widehat{AOB}) = \alpha$ olmak üzere bir tam açının ölçüsü 360° olduğundan şekildeki daire diliminin alanı,

Dairenin alanı $\cdot \dfrac{\alpha}{360°} = \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$ olur

Örnek

Alanı 36π cm^2 olan bir dairenin yarıçapının uzunluğu kaç cm dir?

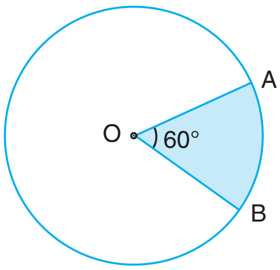
Çözüm

Yarıçap uzunluğu r olmak üzere

$36\pi = \pi \cdot r^2$ ise $36 = r^2$ ise $r = 6$ cm dir.

Örnek

Yandaki O merkezli dairenin yarıçapının uzunluğu 30 cm ve $m(\widehat{AOB}) = 60°$ olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç π cm^2 dir?



Çözüm

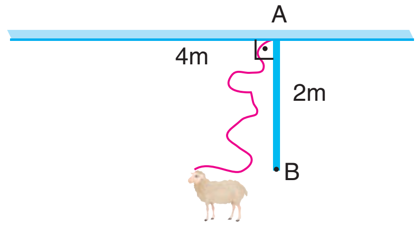
Boyalı bölge, 60°lik merkez açının oluşturduğu daire dilimi olduğundan bu bölgenin alanı,

$\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} = \pi \cdot 30^2 \cdot \frac{60°}{360°} = 150\pi$ cm^2 dir.

Örnek

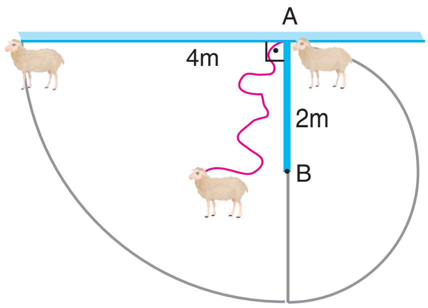
Şekilde $|AB| = 2$ m uzunluğundaki bir engelin A köşesine 4 m uzunluğundaki bir iple koyun bağlanıyor.

Buna göre koyunun otlama alanı <u>en fazla</u> kaç π m^2 dir?



Çözüm

Şekilde görüldüğü gibi koyun A merkezli, yarıçapının uzunluğu 4 m olan çeyrek daire ile B merkezli, yarıçapının uzunluğu 2 m olan yarım dairenin alanlarının toplamı kadar alanda otlar.



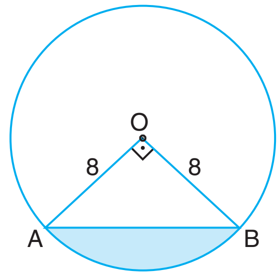
$= \frac{\pi \cdot 4^2}{4} + \frac{\pi \cdot 2^2}{2}$

$= 4\pi + 2\pi$

$= 6\pi$ m^2

Örnek

Şekildeki O merkezli dairenin yarıçapının uzunluğu 8 cm, $m(\widehat{AOB}) = 90°$ olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2dir?



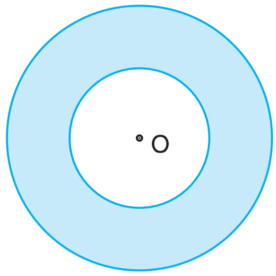
Çözüm

90°lik merkez açının oluşturduğu daire diliminin alanından, AOB dik üçgeninin alanını çıkarmalıyız. Buna göre boyalı bölgenin alanı,

$$\pi r^2 \cdot \frac{90°}{360°} - \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |BO| \cdot \sin 90° = \pi \cdot 8^2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8$$
$$= \pi \cdot 16 - 32$$
$$= 16 \cdot (\pi - 2)\ cm^2 \text{ olur.}$$

Örnek

Şekildeki O merkezli dairelerden büyük olanın yarıçapının uzunluğu $R = 6$ cm ve küçük olanın yarıçapının uzunluğu $r = 3$ cm olduğuna göre iki daire arasında kalan bölgenin alanı kaç $\pi\ cm^2$dir?



Çözüm

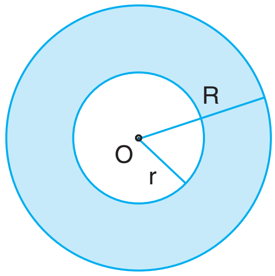
Büyük dairenin alanından küçük dairenin alanını çıkarmalıyız. Buna göre istenilen alan,

$$\pi \cdot R^2 - \pi r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$
$$= \pi \cdot (6^2 - 3^2)$$
$$= \pi \cdot 27$$
$$= 27\pi\ cm^2 \text{ olur.}$$

SONUÇ

Yandaki şekilde O merkezli daireler verilmiştir. R büyük dairenin yarıçapının uzunluğu, r küçük dairenin yarıçapının uzunluğu olmak üzere iki dairenin arasında kalan alan

$\pi \cdot (R^2 - r^2)$ dir.

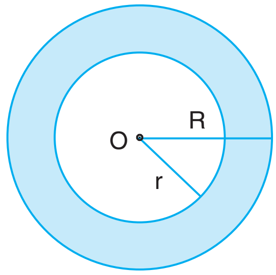


Daire halkası

Örnek

Yandaki şekilde O merkezli daireler verilmiştir. R büyük dairenin yarıçapının uzunluğu, r küçük dairenin yarıçapının uzunluğu olmak üzere $\frac{R}{r} = \frac{5}{3}$ tür.

İki daire arasında kalan alan 128π cm^2 ise küçük dairenin alanı kaç cm^2 dir?



Çözüm

$\frac{R}{r} = \frac{5}{3}$ ise $3R = 5r$

$R = \frac{5r}{3}$

$128\pi = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

$128 = \left(\frac{5r}{3}\right)^2 - r^2$

$128 = \frac{25r^2 - 9r^2}{9}$ ise $128 = \frac{16r^2}{9}$

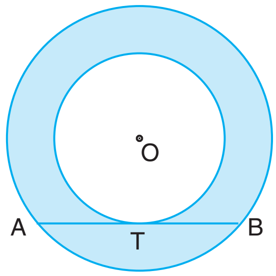
$r^2 = 72$

$r = 6\sqrt{2}$ cm olur.

Küçük dairenin alanı $= \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (6\sqrt{2})^2 = 72\pi$ cm^2 dir.

Örnek

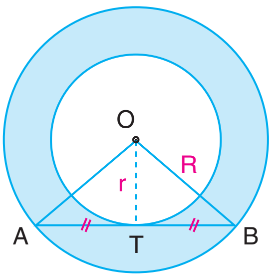
Yandaki şekilde aynı O merkezli daireler verilmiştir. Dıştaki daireye ait [AB] kirişi, içteki daireye T noktasında teğet ve $|AB| = 6$ cm ise iki daire arasında kalan daire halkasının alanı kaç π cm^2 dir?



Çözüm

Büyük dairenin yarıçapının uzunluğu R, küçük dairenin yarıçapının uzunluğu r olmak üzere yarıçap teğete değme noktasında dik olduğundan

$\widehat{BTO}$ dik üçgenidir.



$|BO|^2 = |BT|^2 + |OT|^2$ (Pisagor teoremi)

$R^2 - r^2 = |BT|^2 = \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2$

Daire halkasının alanı $= \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9\pi$ cm^2 dir.



Atatürk: Türk ulusu için her alanda yenilik ve çağdaşlığın yolunu açarken aynı zamanda bilimsel alanda da herkes tarafından bilinmeyen, oldukça faydalı bir çalışmaya imza atmıştır. Atatürk, 1936-1937 yıllarında bir geometri kitabı yazmıştır.

Türkçe matematik ve geometri terimlerini Atatürk'e borçlu olduğumuzu biliyor muydunuz?

"Müsellesin, zaviyetan-ı dahiletan mecmu'ü 180 derece ve müselles-i mütesaviyü'l-adla, zaviyeleri biribirine müsavi müselles demektir." yerine "Üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir ve eşkenar üçgen, açıları birbirine eşit üçgen demektir." dememizi Atatürk'e borçluyuz.

Atatürk bizzat yazdığı "Geometri" kitabında yeni matematik ve geometri terimlerini dilimize kazandırmıştır.

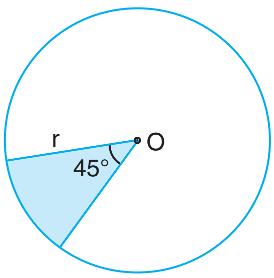
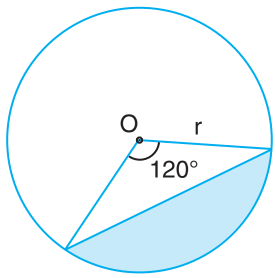
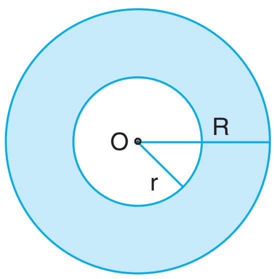
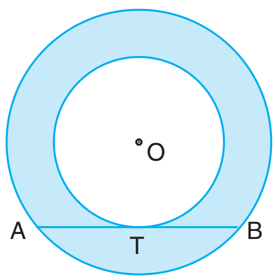
Mustafa Kemal Atatürk, Geometri, İstanbul, 1937.

UYGULAYALIM 5-4

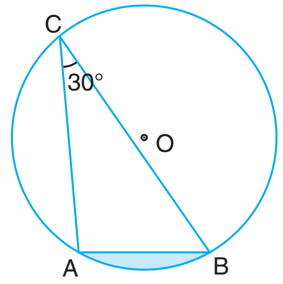
1. Yarıçapının uzunluğu 5 cm olan dairenin alanını kaç π cm dir?

2. Alanı 72π cm^2 olan dairenin yarıçapının uzunluğu kaç cm dir?

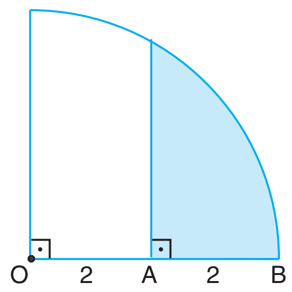
3. Aşağıdaki O merkezli dairelerin üzerlerinde verilenlere göre boyalı bölgelerin alanlarını bulunuz.

a) r = 10 cm 	**b)** r = 6 cm 
c) R = 9 cm r = 4 cm 	**ç)** |AB| = 16 cm T değme noktası 

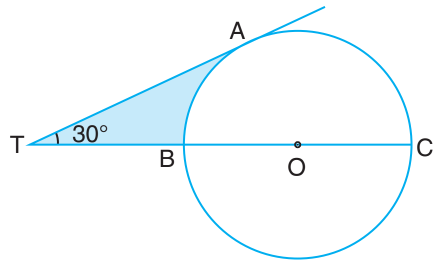
4. Şekildeki O merkezli dairenin yarıçapının uzunluğu 12 cm ve $m(\widehat{ACB}) = 30°$ olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2dir?



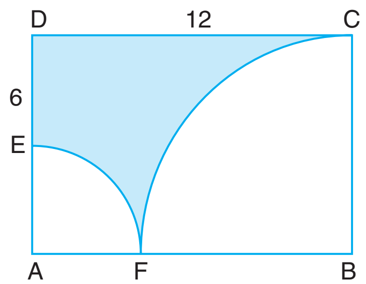
5. O merkezli çeyrek dairede $|OA| = |AB| = 2$ cm ise boyalı bölgenin alanı kaç cm^2dir?



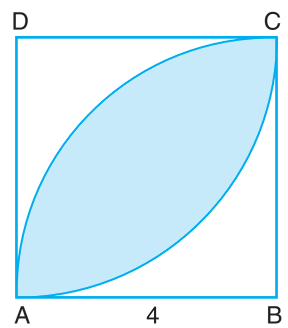
6. Şekildeki O merkezli dairenin yarıçapının uzunluğu 12 cm, $m(\widehat{ATB}) = 30°$ ve [TA, daireye A noktasında teğet ve T, B, O, C noktaları doğrusal olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2dir?



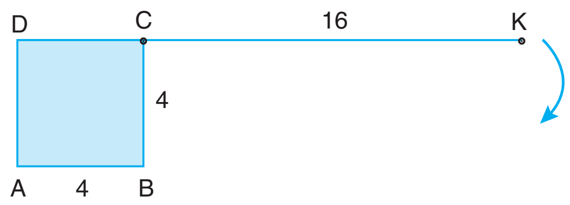
7. Şekilde ABCD dikdörtgendir. A ve B merkezli çeyrek daireler birbirine F noktasında teğettir. $|DE| = 6$ cm ve $|CD| = 12$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2dir?



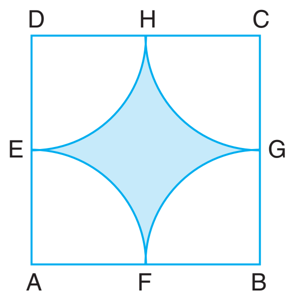
8. ABCD karesi ile B ve D merkezli çeyrek daireler verilmiştir. $|AB| = 4$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2dir?



9. Şekilde 16 cm uzunluğundaki ip, gergin biçimde kenar uzunluğu 4 cm olan bir karenin etrafına saat yönünde döndürülerek sarılıyor. D, C, K noktaları doğrusal olduğuna göre K ucu C köşesine geldiğinde ipin taradığı bölgenin alanı kaç cm^2 olur?

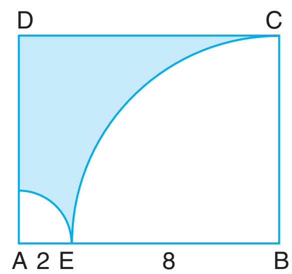


10. ABCD kare ve $|AB| = 8$ cm dir. Buna göre A, B, C ve D merkezli çeyrek dairelerin sınırladığı boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?



11. Şekilde ABCD dikdörtgeninin A ve B köşelerini merkez kabul eden iki daire verilmiştir.

$|AE| = 2$ cm, $|BE| = 8$ cm olduğuna göre boyalı alan kaç cm^2 dir?



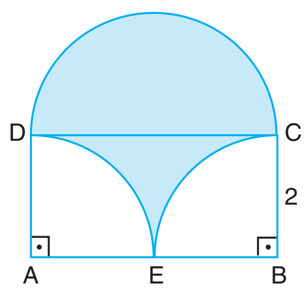
12. ABCD bir dikdörtgendir.

$\overset{\frown}{DC}$: CD çaplı yarım daire yayı

$\overset{\frown}{DE}$: A merkezli çeyrek daire yayı

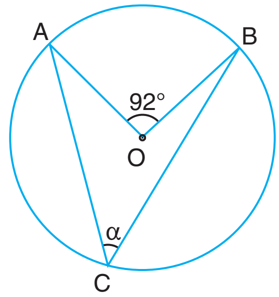
$\overset{\frown}{EC}$: B merkezli çeyrek daire yayı

Yandaki şekilde boyalı alan kaç birimkaredir?



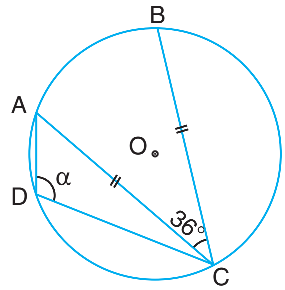
5. DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Yandaki O merkezli çemberde $m(\widehat{AOB}) = 92°$ olduğuna göre $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ kaç derecedir?



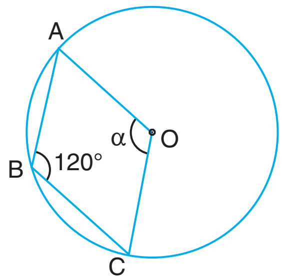
A) 92 B) 72 C) 64
D) 46 E) 40

2. Yandaki çemberde $|AC| = |BC|$, $m(\widehat{ACB}) = 36°$ olduğuna göre $m(\widehat{ADC}) = \alpha$ kaç derecedir?



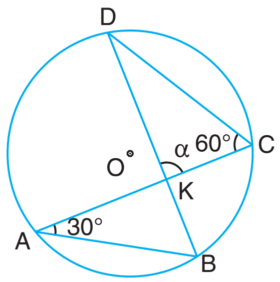
A) 72 B) 80 C) 86
D) 102 E) 108

3. Yandaki O merkezli çemberde $m(\widehat{ABC}) = 120°$ olduğuna göre $m(\widehat{AOC}) = \alpha$ kaç derecedir?



A) 120 B) 100 C) 90
D) 80 E) 70

4. Yandaki çemberde A, K, C ve B, K, D noktaları doğrusal $m(\widehat{BAC}) = 30°, m(\widehat{KCD}) = 60°$ olduğuna göre $m(\widehat{DKC}) = \alpha$ kaç derecedir?



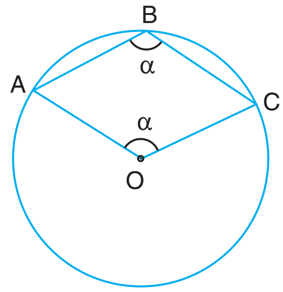
A) 60 B) 90 C) 110
D) 120 E) 125

5. Yandaki O merkezli çember, A noktasından B noktasına kadar d doğrusu üzerinde yuvarlanarak B noktasında durdurulmuştur. Çemberin çapı 4 cm ve $|AB| = 36\pi$ cm olduğuna göre çember kendi etrafında kaç tur atmıştır?



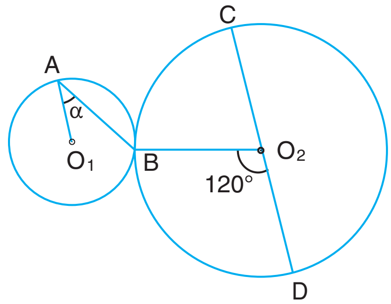
A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 9

6. Yandaki O merkezli çemberde $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{AOC}) = \alpha$ olduğuna göre α kaçtır?



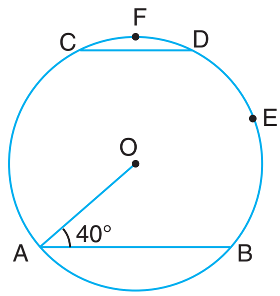
A) 90 B) 100 C) 105
D) 110 E) 120

7. $m(\widehat{BO_2D}) = 120°$, $m(\widehat{O_1AB}) = \alpha$ Şekildeki O_1 ve O_2 merkezli çemberler B noktasında dıştan teğet ve $[AO_1]//[CD]$ dır. Buna göre $m(\widehat{O_1AB}) = \alpha$ kaç derecedir?



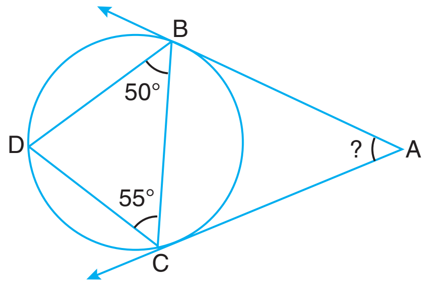
A) 20 B) 30 C) 40
D) 45 E) 60

8. Merkezi O noktası olan yandaki çemberde $m(\widehat{OAB}) = 40°$, $[CD]//[AB]$ ve $m(\widehat{BED}) = 105°$ olduğuna göre $\overset{\frown}{CFD}$ nın ölçüsü kaç derecedir?



A) 45 B) 50 C) 55
D) 60 E) 65

9. Yandaki şekilde [AB ve [AC çembere teğettir. DBC açısının ölçüsü 50°, DCB açısının ölçüsü 55° olduğuna göre BAC açısının ölçüsü kaç derecedir?



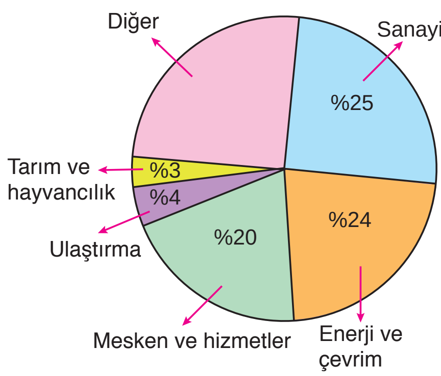
A) 30 B) 40 C) 45
D) 50 E) 60

10. Türkiye'de 2018 yılında toplam enerji tüketiminin yaklaşık olarak dağılımı aşağıdaki gibidir.

- Sanayi: %25
- Enerji ve çevrim: %24
- Mesken ve hizmetleri: %20
- Ulaştırma: %4
- Tarım ve hayvancılık: %3

Artan enerji ise diğer hizmetler için kullanılmaktadır.

Buna göre yandaki daire grafiğinde diğer hizmetlerin bulunduğu daire diliminin açı ölçüsü kaç derecedir?

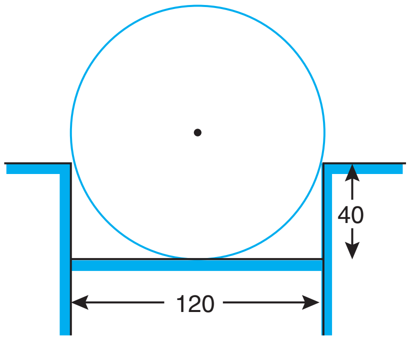


A) 86,4° B) 84° C) 82,5°
D) 80° E) 75,5°

11. Dikey kesiti çember biçiminde olan bir iş makinesi lastiği; derinliği 40 cm, boyu 120 cm, dikey kesiti dikdörtgen biçiminde olacak şekilde oyulmuş bir altlığa şekildeki gibi tam oturtularak sergilenmektedir.

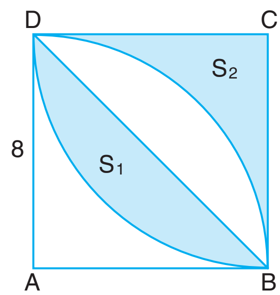
Buna göre lastiğin dikey kesitinin yarıçapının uzunluğu kaç cm dir?

A) 85 B) 82,5 C) 75
D) 71 E) 65



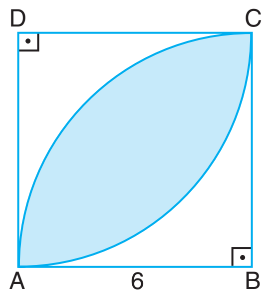
12. Yandaki ABCD karesinin içine A ve C merkezli çeyrek daireler çizilmiştir. [BD] köşegen, |AD| = 8 cm, S_1 ve S_2 bulundukları bölgelerin alanları olduğuna göre $S_1 + S_2$ toplamı kaç cm^2 dir?

A) 24 B) 28 C) 30
D) 32 E) 64



13. Yandaki ABCD karesinde |AB| = 6 cm dir. B ve D merkezli çeyrek dairelerin arasında kalan boyalı alan kaç cm^2 dir?

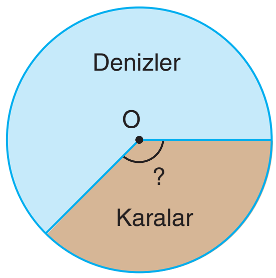
A) $18(\pi - 2)$ B) $14(\pi + 2)$ C) $9(\pi + 1)$
D) 8π E) $12(\pi - 4)$



14. Yeryüzündeki denizlerin alanları toplamının, karaların alanları toplamına oranı yaklaşık $\frac{7}{3}$ olarak veriliyor.

Buna göre yeryüzünün toplam alanında denizlerle karaların payını gösteren bir dairesel grafikte karaların alanı yaklaşık kaç derecelik merkez açı ile gösterilir?

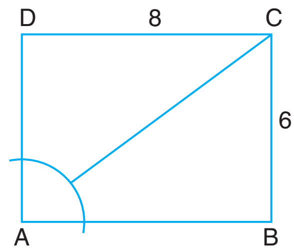
A) 94 B) 96 C) 102
D) 104 E) 108



15. Kenar uzunlukları 8 br ve 6 br olan bir dikdörtgende şekildeki gibi A merkezli, yarıçapının uzunluğu 1 birim olan çember yayı çizilmiştir.

C nin bu yay üzerinde kendisine en yakın olan nokta ile arasındaki uzaklık kaç birimdir?

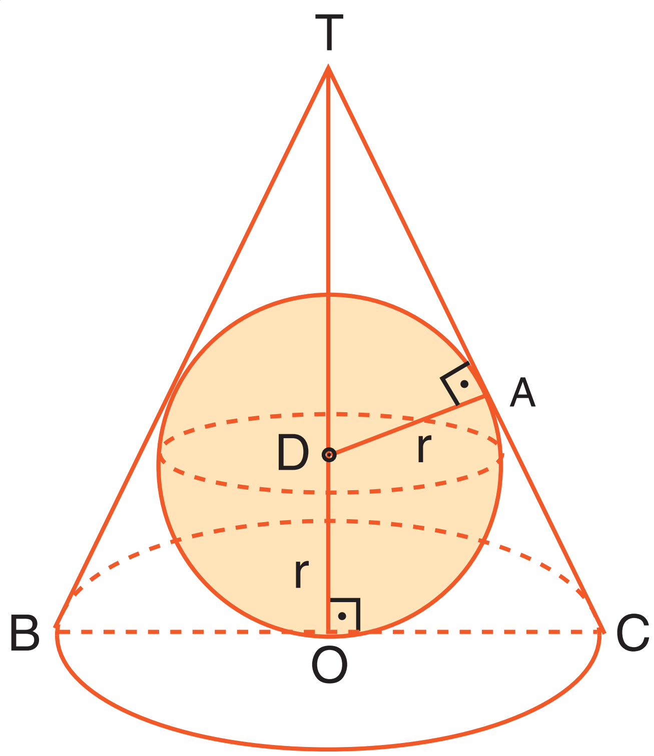
A) 6 B) 8 C) 9
D) 9,5 E) 10



6. UZAY GEOMETRİ

6. UZAY GEOMETRİ

6.1. KATI CİSİMLER

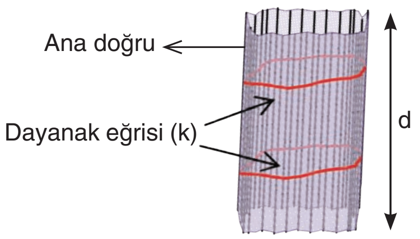


6.1. KATI CİSİMLER

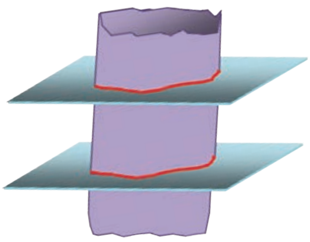
6.1.1. Küre, Dik Dairesel Silindir, Dik Dairesel Koninin Yüzey Alan ve Hacim Bağıntıları

Dik Dairesel Silindir ve Dik Dairesel Silindirin Yüzey Alanı

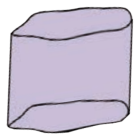
Uzayda bir düzlemde bir k kapalı eğrisi ile bu düzleme paralel olmayan bir d doğrusu verilsin. k eğrisini kesen ve d doğrusuna paralel olan doğruların kümesine **silindirik yüzey,** verilen düzlemsel eğriye bu yüzeyin **dayanak eğrisi,** yüzeyi oluşturan her bir doğruya silindirik yüzeyin **ana doğrusu,** silindirik yüzeyin dayanak eğrisi düzlemine paralel olan iki düzlem tarafından sınırlandırılmış kapalı yüzey parçasına **silindir yüzeyi** denir.



Silindirik yüzey

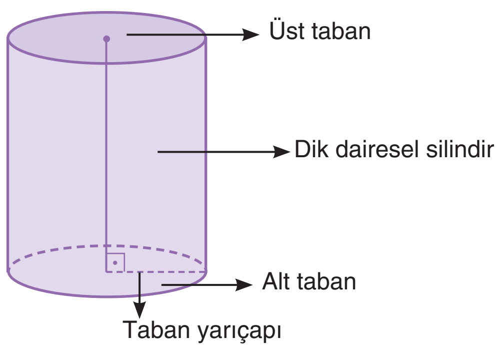

Silindirik bölge


Silindir

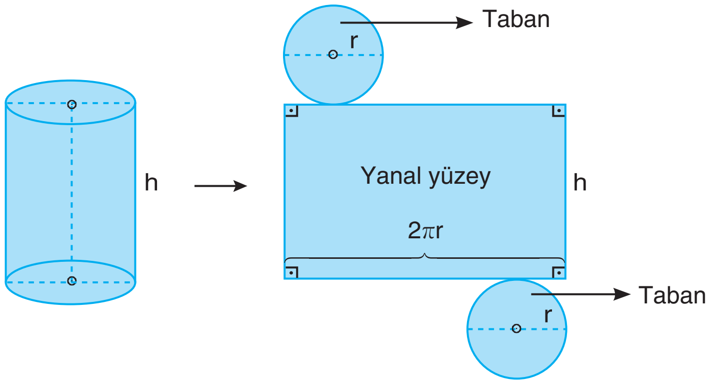

Silindir yüzeyi

Silindir yüzeyinin sınırladığı bölgeye **silindirik bölge,** bu bölgenin paralel iki düzlem ile sınırlı kesitine **silindir,** bu düzlemler arasındaki dikme parçasına **silindirin yüksekliği,** silindirin alt ve üstünde oluşan yüzeylerine **alt ve üst taban yüzeyleri,** silindirik yüzey parçasına da **silindirin yan yüzeyi** denir.

Alt ve üst tabanları eş iki daireden oluşan ve ana doğrusu tabanlara dik olan kapalı bölgeye **dik dairesel silindir** denir.



Taban yarıçapı aynı zamanda dik dairesel silindirin de yarıçapıdır. Alt tabanlar, üst tabanının merkezlerini birleştiren doğru parçası dik dairesel silindirin eksenidir.



Dik dairesel silindirin yüzey alanı $= 2 \cdot$taban alanı + yanal yüzey alanı

$= 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

$= 2\pi r\,(r + h)$

Örnek

Taban yarıçapı 5 br, yüksekliği 3 br uzunluğunda olan dik dairesel silindirin yüzey alanını bulalım.

Çözüm

Silindirin yüzey alanı $= 2\pi r \cdot (r + h)$

$= 2\pi \cdot 5 \cdot (5 + 3)$

$= 80\pi$ br^{2}dir.

Örnek

Yanal alanı $72\,\pi$ br^2 olan dik dairesel silindirin taban yarıçapının uzunluğu 9 br ise yüksekliğini bulalım.

Çözüm

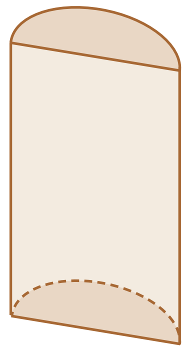
Silindirin yüksekliği h olmak üzere

silindirin yanal yüzey alanı $= 2\pi r \cdot h$

$72\pi = 2\pi \cdot 9 \cdot h$

$h = 4$ br bulunur.

Örnek



Dik dairesel silindir şeklindeki bir ahşap kütük taban çapından geçecek şekilde kesilerek yandaki şekil elde ediliyor. Dik dairesel silindirin taban yarıçapının uzunluğu 10 cm, yüksekliği 40 cm olduğuna elde edilen cismin yüzey alanını bulalım.

Çözüm

Kısa kenar uzunluğu $2 \cdot 10 = 20$ cm ve uzun kenar uzunluğu 40 cm olan dikdörtgenin alanı ile, dik dairesel silindirin tüm yüzey alanının yarısını toplamalıyız.

Dikdörtgenin alanı $= 20 \cdot 40 = 800 \text{ cm}^2$

$$\begin{aligned}\text{Dik dairesel silindirin alanı} &= \pi r^2 \cdot h \\ &= \pi \cdot 10^2 \cdot 40 \\ &= \pi \cdot 4000 \\ &= 4000 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Şekildeki cismin alanı} &= 800 + \frac{4000}{2}\pi \\ &= 800 + 2000\pi \text{ cm}^2 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Örnek

Taban yarıçapının uzunluğu ile yüksekliğinin toplamı 12 br olan dik dairesel silindirin yüzey alanı $96\pi \text{ br}^2$ ise taban yarıçapının uzunluğunu bulalım.

Çözüm

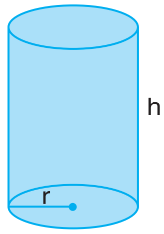
Silindirin yüzey alanı $= 2\pi r(r + h)$

$96\pi = 2\pi r \cdot 12$ ise $r = 4$ br bulunur.

Dik Dairesel Silindirin Hacmi

Yandaki şekilde taban yarıçapı r, yüksekliği h olan bir dik dairesel silindir verilsin.
Dik dairesel silindirin hacmi V olmak üzere
Dik dairesel silindirin hacmi (V) = taban alanı x yükseklik

$V = \pi r^2 \cdot h$ dir.



Örnek

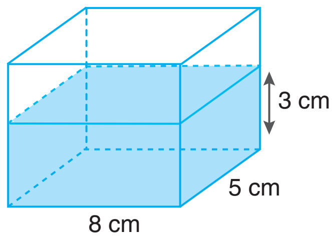
Taban yarıçapının uzunluğu 3 cm, yüksekliği 5 cm olan dik dairesel silindirin hacmini bulalım.

Çözüm

Silindirin hacmi $(V) = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 45\pi \text{ cm}^3$ bulunur.

Örnek

Şekildeki dikdörtgenler prizması içindeki su, taban yarıçapının uzunluğu 2 cm olan dik dairesel silindir içine boşaltılıyor. Su hiç israf olmayacağına ve içi boş olan dik dairesel silindir boşaltılacak suyun tamamını alacağına göre silindirdeki suyun yüksekliği kaç cm olur?



Çözüm

Suyun hacmi = taban alanı x yükseklik = $8 \cdot 5 \cdot 3 = 120 \text{ cm}^3$ olur.

$\pi \cdot r^2 \cdot h =$ Suyun hacmi

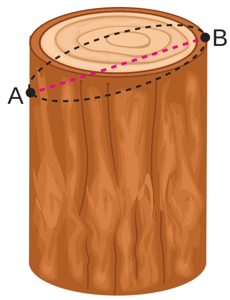
$\pi \cdot 2^2 \cdot h = 120$

$\pi \cdot 4 \cdot h = 120$

$h = \frac{120}{4 \cdot \pi} = \frac{30}{\pi}$ olduğundan suyun yüksekliği $\frac{30}{\pi}$ cm olur.

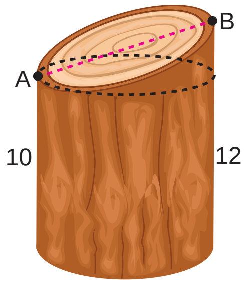
Örnek

Taban yarıçapının uzunluğu 4 cm, yüksekliği 12 cm olan dik dairesel silindir şeklindeki bir kütük 10 cm yükseklikten A noktasından B noktasına doğru düzgün bir şekilde kesiliyor. Kesilen cismin büyük parçasının hacmini bulalım.



Çözüm

Cisim kesildikten sonra yandaki şekil elde edilir. Elde edilen cismin hacmini bulmak için cismin kesilmeden önceki hacminden, kesilen parçanın hacmini çıkarmalıyız.



Cismin kesilmeden önceki hacmi $= \pi r^2 \cdot h$

$= \pi \cdot 4^2 \cdot 12$

$= 192\pi \text{ cm}^3$

Kesilen parçanın hacmi taban yarıçapının uzunluğu 4 cm ve yüksekliği 2 cm olan dik dairesel silindirin yarısına eşittir.

Kesilen parçanın hacmi $= \pi r^2 \cdot (12 - 10) \cdot \frac{1}{2}$

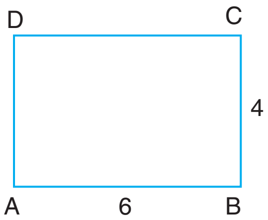
$= \pi \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$

$= 16\pi \text{ cm}^3$

Cismin hacmi $= 192\pi - 16\pi = 176\pi \text{ cm}^3$ olur.

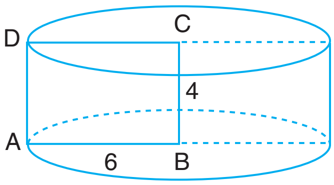
Örnek

Yandaki şekilde $|AB| = 6$ br, $|BC| = 4$ br olan bir dikdörtgen verilmiştir. ABCD dikdörtgeni $[BC]$ etrafında 360° döndürüldüğünde oluşan cismin hacmini bulalım.



Çözüm

Şekilde görüldüğü gibi döndürme sonunda yarıçapının uzunluğu 6 br, yüksekliği 4 br olan dik dairesel silindir oluşur. Buna göre



silindirin hacmi $= \pi r^2 \cdot h$

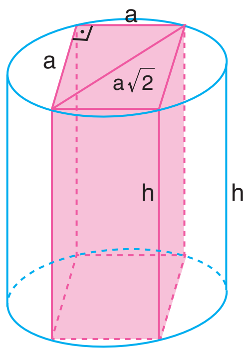
$= \pi \cdot 6^2 \cdot 4$

$= 144\pi \text{ br}^3$ bulunur.

Örnek

Bir dik dairesel silindir içine en büyük hacimli dik kare prizma yerleştiriliyor. Kare prizmanın hacminin, silindirin hacmine oranını bulalım.

Çözüm



Kare prizmanın taban ayrıtı a, yüksekliği h olsun.

Bu durumda silindirin çapı $a\sqrt{2}$ olur.

Dolayısıyla silindirin taban yarıçapı $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ bulunur.

$$\text{Silindirin hacmi (V)} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{a^2 \cdot 2}{4} \cdot h = \pi \cdot \frac{a^2 \cdot h}{2} \text{ olur.}$$

$$\text{Kare dik prizmanın hacmi} = \text{taban alanı x yükseklik} = a^2 \cdot h$$

$$\frac{\text{kare prizmanın hacmi}}{\text{silindirin hacmi}} = \frac{a^2 \cdot h}{\pi . \frac{a^2 h}{2}} = \frac{2}{\pi} \text{ bulunur.}$$

Örnek

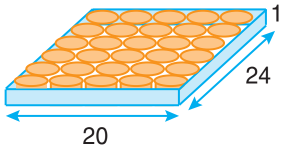
1 cm kalınlığında ve 4 cm çapında olan dik dairesel silindir biçimindeki bisküvilerden 30 tanesi beşerli 6 sıra hâlinde, dikdörtgenler prizması biçimindeki bir kutuya konulacaktır. Bu kutunun hacmi en az kaç cm^3 olmalıdır?

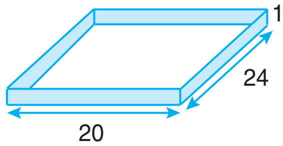
Çözüm

Her bir bisküvinin çapı 4 cm ise kutunun ayrıtları sırası ile $5 \cdot 4 = 20$ cm ve $6 \cdot 4 = 24$ cm olur.

Buna göre

$$\text{kutunun hacmi} = 20 \cdot 24 \cdot 1 = 480 \text{ cm}^3 \text{ bulunur.}$$



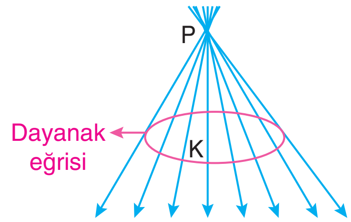


Dik Dairesel Koni, Dik Dairesel Koninin Alanı

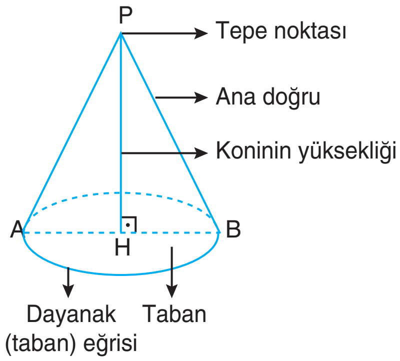
Uzayda kapalı bir K eğrisi ile düzlemin dışında alınan sabit bir P noktası verilsin. K eğrisinin her noktası ile P noktasından geçen doğruların oluşturduğu yüzeye **konik yüzey** denir.

Yandaki konik yüzeyde;

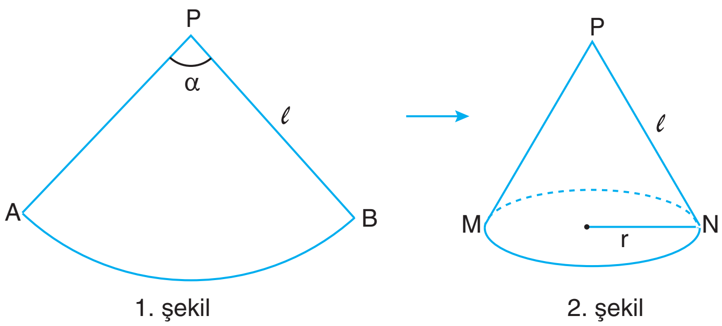
- P noktasına **tepe noktası,**
- K eğrisine **taban eğrisi** veya **dayanak eğrisi,**
- P noktasından geçen ve konik yüzeyi oluşturan doğrulara konik yüzeyin **ana doğrusu** denir.



Konik yüzeyin tüm ana doğrularını kesen bir düzlemle tepe noktası arasında kalan cisme **koni** denir.



Tepeden tabana indirilen dikme, tabanın ağırlık merkezinden geçiyorsa bu tür konilere **dik koni,** tabanı daire olan dik koniye **dik dairesel koni** denir.



1. şekilde görüldüğü gibi ℓ yarıçaplı, α merkez açılı bir daire diliminden A ve B uçları birleştirilerek 2. şekilde belirtilen cismi elde etmek mümkündür.

Bu durumda $\overset{\frown}{AB}$ yayı, 2. şekilde cismin tabanındaki çemberin çevresidir. Buradan

$$2\pi \cdot \ell \cdot \frac{\alpha}{360°} = 2\pi r$$

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{r}{\ell}$$ bağıntısı elde edilir.

Dik dairesel koninin yanal yüzey alanı $= \pi \cdot \ell^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$

$= \pi \cdot \ell^2 \cdot \dfrac{r}{\ell}$

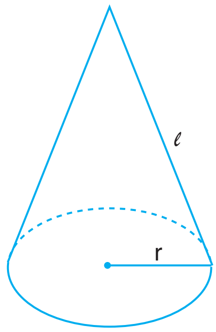
$= \pi \cdot r \cdot \ell$

Koninin yüzey alanı $=$ yanal yüzey alanı $+$ taban alanı

$= \pi \cdot r \cdot \ell + \pi r^2$

$= \pi r(\ell + r)$ dir.

Bu bağıntıda r, koninin taban yarıçapı; ℓ, koninin ana doğrusudur.



Örnek

Taban yarıçapının uzunluğu 5 br, ana doğrusunun uzunluğu 7 br olan dik dairesel koninin yanal alanını bulalım.

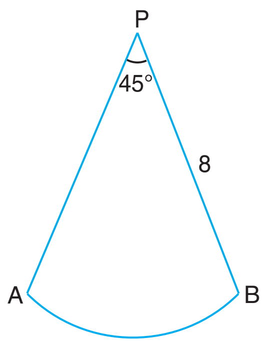
Çözüm

$r = 5$ br ve $\ell = 7$ br olmak üzere

koninin yanal alanı $= \pi \cdot r \cdot \ell = \pi \cdot 5 \cdot 7 = 35\pi$ br^2 bulunur.

Örnek

Yandaki P merkezli daire diliminin yarıçapının uzunluğu 8 br ve $m(\widehat{APB}) = 45°$ dir. Bu daire dilimi A ve B noktaları birbirine değecek şekilde kıvrılarak bir dik dairesel koni elde ediliyor. Oluşan dik dairesel koni P tepe noktası olacak şekilde bir düzlem üzerine konulduğunda tabanının kapladığı alan ve yanal yüzey alanının toplamını bulalım.



Çözüm

Elde edilecek olan dik dairesel silindirin taban yarıçapının uzunluğu r olsun.

P merkezli dairenin yarıçapının uzunluğu f ve $\alpha = 45°$ ise $\dfrac{r}{\ell} = \dfrac{\alpha}{360°}$ bağıntısından

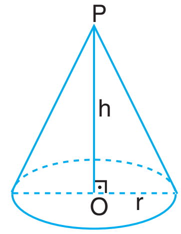
$\dfrac{r}{8} = \dfrac{45°}{360°}$

$r = 1$ br bulunur. Koninin toplam alanı $= \pi r(\ell + r) = \pi \cdot 1 \cdot (8 + 1) = 9\pi$ br^2 olur.

Dik Dairesel Koninin Hacmi

Dik dairesel koninin hacmi $(V) = \dfrac{\text{taban alanı x yükseklik}}{3}$

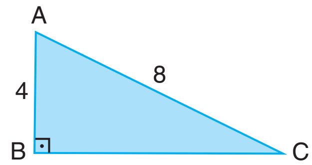
$= \dfrac{\pi r^2 \cdot h}{3}$ tür.



Örnek

ABC dik üçgeni $[BC]$ etrafında 360° döndürülüyor.

$|AB| = 4$ br ve $|AC| = 8$ br olduğuna göre oluşan cismin yüzey alanını bulalım.



Çözüm

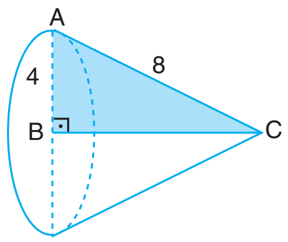
Döndürme sonucunda yandaki koni oluşur.

Bu durumda $r = 4$ br ve $\ell = 8$ br dir.

Cismin yüzey alanı $= \pi r \ell + \pi r^2$

$= \pi \cdot 4 \cdot 8 + \pi \cdot 4^2$

$= 48\pi$ br^2 bulunur.



Örnek

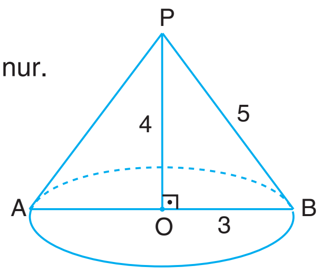
Taban yarıçapının uzunluğu 3 br, ana doğrusunun uzunluğu 5 br olan dik dairesel koninin hacmini bulalım.

Çözüm

Koninin yüksekliği $= h = |OP|$ olmak üzere $h^2 + 3^2 = 5^2$ ise $h = 4$ br bulunur.

Koninin hacmi $(V) = \dfrac{\text{taban alanı x yükseklik}}{3}$

$= \dfrac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = \dfrac{36\pi}{3}$ br$^3 = 12\pi$ br^3 olur.



Örnek

Yarıçapının uzunluğu 6 br, hacmi 48π br^3 olan dik dairesel koninin yüksekliğini bulalım.

Çözüm

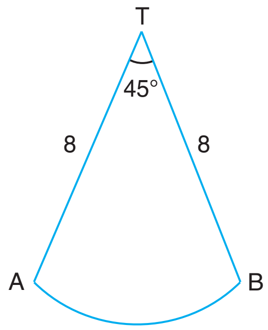
Koninin hacmi $= \dfrac{\pi r^2 \cdot h}{3}$ (h = koninin yüksekliği, r = yarıçap)

$48\pi = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot h}{3}$

$h = 4$ br bulunur.

Örnek

Şekildeki T merkezli daire dilimi kıvrılarak dik dairesel koni oluşturuluyor $|AT| = 8$ br ve $m(\widehat{ATB}) = 45°$ ise oluşan dik koninin hacmini bulalım.



Çözüm

r, koninin taban yarıçapı; ℓ, koninin ana doğrusu olmak üzere

$$\frac{r}{\ell} = \frac{\alpha}{360°} \text{ ise } \frac{r}{8} = \frac{45°}{360°}$$

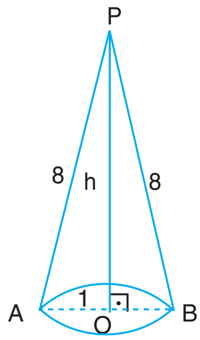
$r = 1$ br bulunur.

$h^2 + 1^2 = 8^2$ ise $h = 3\sqrt{7}$ br olur.

$$\text{Koninin hacmi} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

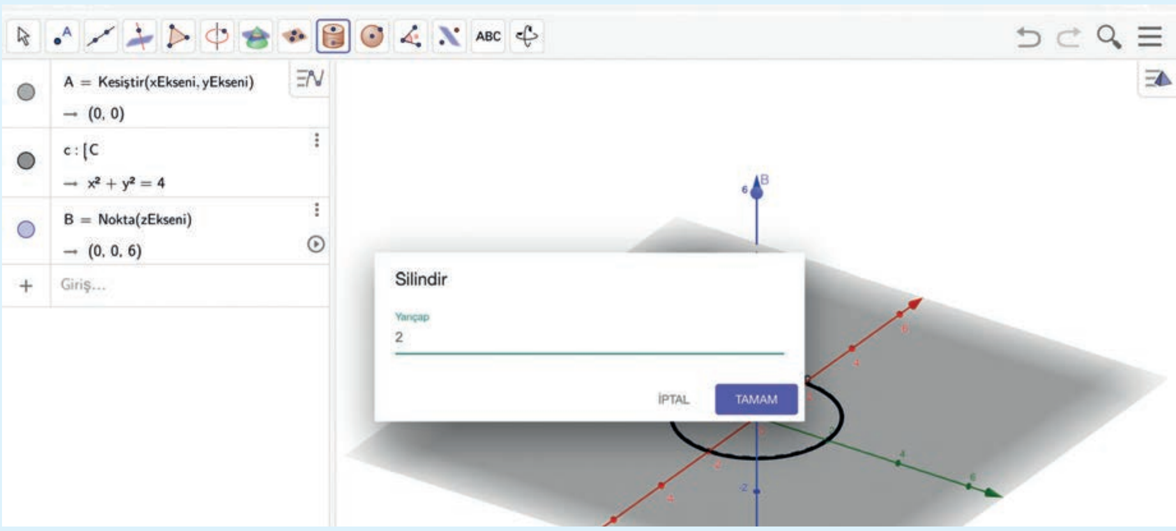
$$= \frac{\pi \cdot 1.3\sqrt{7}}{3}$$

$$= \sqrt{7}\pi \text{ br}^3 \text{ bulunur.}$$



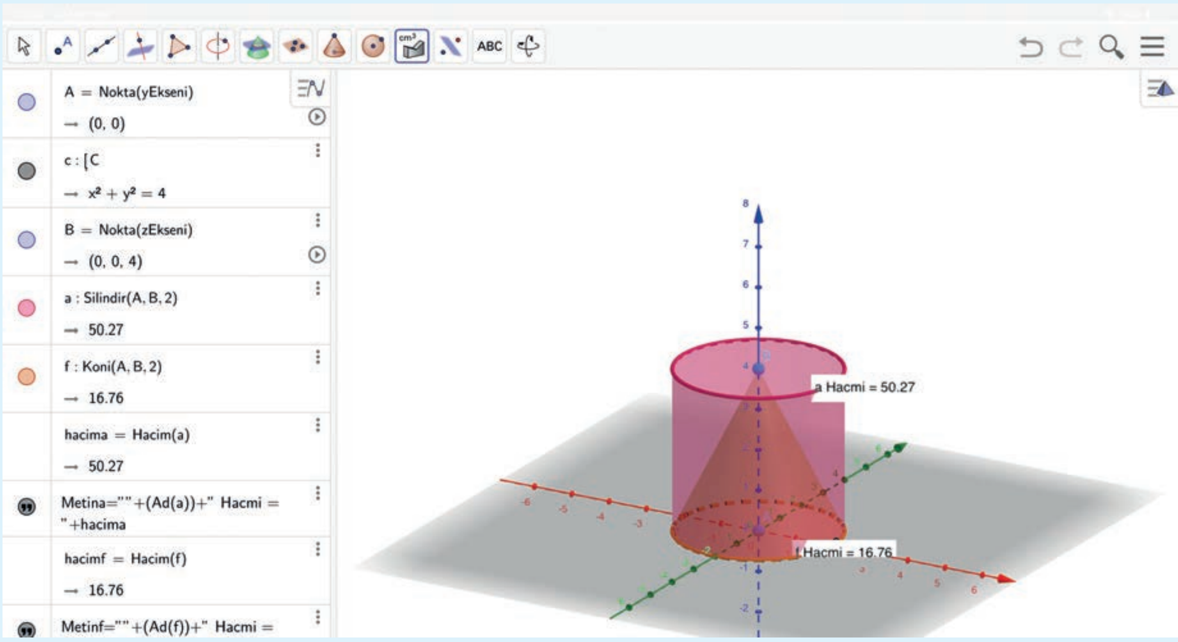
Dinamik Matematik ve Geometri Programını açalım.

Daire menüsünü açarak yarıçapı 2 br olan bir daire oluşturalım. Bunun için programda açılan yönlendirmeleri takip edelim.



Silindir menüsünü açarak taban yarıçapı 2 br, yüksekliği 4 br olan dik dairesel silindir oluşturalım. Dik dairesel silindirin merkezi ile dairenin merkezinin aynı olmasına dikkat ediniz.

Koni menüsünü açarak benzer şekilde taban yarıçapı 2 br, yüksekliği 4 br olan dik dairesel koni oluşturalım.



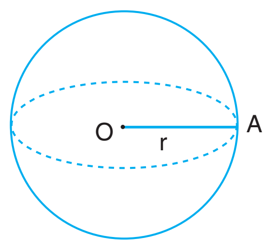
Hacim menüsünü kullanarak dik dairesel silindir ile dik koninin hacimlerini oluşturalım.

Dik dairesel koninin hacminin, dik dairesel silindirin hacminin $\frac{1}{3}$ ü olduğuna dikkat ediniz. (Programda sonuçlar yüzde birler basamağına yuvarlanmıştır.)

Önce imleç butonunu tıklayıp ardından koninin tepe noktasını yukarı aşağı hareket ettirerek dik dairesel silindir ile dik dairesel koninin hacimleri arasındaki oranın değişmediğini gözlemleyebiliriz.

Küre, Kürenin Yüzey Alanı

Uzayda, sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesine **küre yüzeyi,** bu yüzey ile sınırlanan cisme ise **küre** denir. Sabit nokta kürenin merkezi, sabit uzaklık ise kürenin yarıçapıdır.



Yandaki kürede O merkez, [OA] yarıçap olup |OA| = r dir.

r yarıçaplı bir kürenin yüzey alanı $= 4\cdot\pi\cdot r^2$ dir.

Örnek

Yarıçapının uzunluğu 5 br olan kürenin yüzey alanını bulalım.

Çözüm

$r = 5$ olduğundan kürenin yüzey alanı $= 4\pi r^2 = 4\pi\cdot 5^2 = 100\pi$ br^2 olur.

Örnek

Yüzey alanı 324π br^2 olan kürenin yarıçapının uzunluğunu bulalım.

Çözüm

Kürenin yüzey alanı $= 4\pi r^2 \Rightarrow 324\pi = 4\pi r^2 \Rightarrow 81 = r^2 \Rightarrow r = 9$ br bulunur.

Örnek

Hacmi 288π br^3 olan kürenin yüzey alanını bulalım.

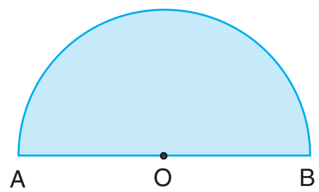
Çözüm

Kürenin hacmi $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ise $288\pi = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ ise $r = 6$ br olur.

Kürenin yüzey alanı $= 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi$ br^2 bulunur.

Örnek

O merkezli, $[AB]$ çaplı yarım daire $[AB]$ etrafında $360°$ döndürülüyor. $|AB| = 8$ br ise döndürme sonucu oluşan cismin yüzey alanını bulalım.

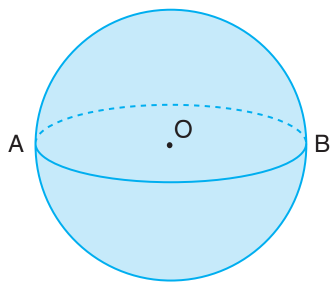


Çözüm

Döndürme sonucunda $[AB]$ çaplı küre elde edilir.

$|AB| = 8$ br ise oluşan kürenin yarıçapının uzunluğu $r = 4$ br olur.

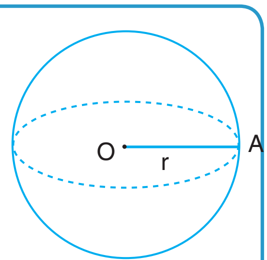
Kürenin yüzey alanı $= 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi$ br^2 bulunur.



Kürenin Hacmi

Yarıçapının uzunluğu r olan kürenin hacmi $= \frac{4}{3}\pi r^3$

bağıntısı ile hesaplanır.



Örnek

Yarıçapının uzunluğu 6 br olan kürenin hacmini bulalım.

Çözüm

Kürenin hacmi $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3$

$= 288\,\pi$ br^{3}tür.

Örnek

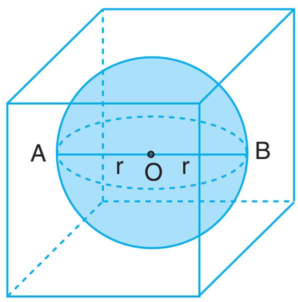
Hacmi $\frac{500\pi}{3}$ br^3 olan bir küreyi içine alabilecek en küçük hacimli küpün bir ayrıtının uzunluğunu bulalım.

Çözüm

Kürenin hacmi $= \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{500\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 125 = r^3 \Rightarrow 5\text{ br} = r$ olur.

Kürenin çapı, küpün ayrıtına eşit olmalıdır. Buna göre

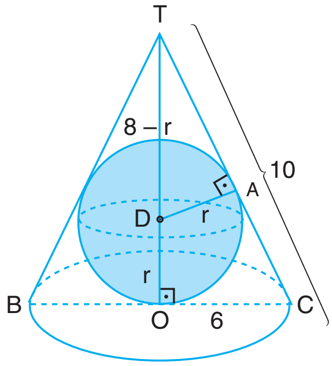
küpün ayrıt uzunluğu $= 2r = 2 \cdot 5 = 10$ br bulunur.



Örnek

Taban yarıçapının uzunluğu 6 br, ana doğrusu 10 br olan koninin içine yerleşebilecek en büyük hacimli kürenin hacmini bulalım.

Çözüm



Şekilde görüldüğü gibi TOC dik üçgeninde

$|TC| = 10$ br, $|OC| = 6$ br ise Pisagor bağıntısından

$|OT|^2 + |OC|^2 = |TC|^2$

$|OT|^2 + 6^2 = 10^2$

$|OT| = 8$ br olur.

TOC üçgeni ile TAD üçgenleri benzerdir.

Dolayısıyla

$\frac{8-r}{10} = \frac{r}{6}$ ise $10r = 48 - 6r$

$16r = 48$

$r = 3$ br bulunur. Kürenin hacmi $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$ br^3 olur.

UYGULAYALIM 6-1

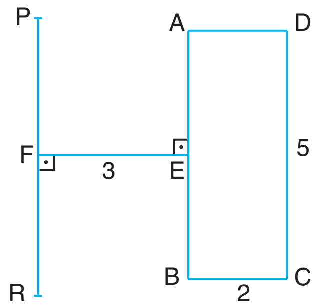
1. Taban yarıçapının uzunluğu 4 br, yüksekliği 7 br olan dik dairesel silindirin yanal alanı kaç br²dir?

2. Yanal alanı 12π br^2 ve yüksekliği 4 br olan dik dairesel silindirin hacmini bulunuz.

3. Yüksekliği, taban yarıçapının uzunluğunun 3 katı olan dik dairesel silindirin hacmi 24π br^3 ise taban alanlarının toplamını bulunuz.

4. Bir ayrıtı 8 br olan küpün içine yereştirilebilecek en büyük hacimli dik dairesel silindirin hacmi kaç br^{3}tür?

5. Yandaki şekilde $|DC| = 5$ br, $|CB| = 2$ br ve $|EF| = 3$ br dir. ABCD dikdörtgeni $[PR]$ etrafında 360° döndürülüyor. Oluşan cismin yanal alanını ve hacmini bulunuz.

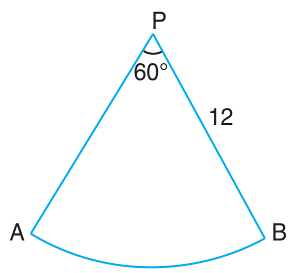


6. Ahmet ve babası birlikte evin duvarlarını yarıçapının uzunluğu 4 cm ve yüksekliği 12 cm olan dik dairesel silindir şeklindeki boya rulosu ile boyuyorlar. Rulo boyaya her batırıldığında 3 tam tur atacak kadar alanı boyadığına göre bir kez batırıldığında kaç cm^2 lik alanı boyar?

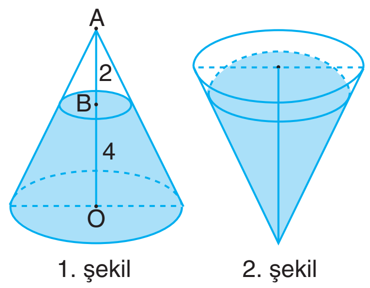


7. Taban yarıçapının uzunluğu 8 br, yanal alanı 80π br^2 olan dik dairesel koninin cisim yüksekliğini bulunuz.

8. Şekildeki P merkezli daire diliminde $|AB| = 12$ br, $m(\widehat{APB}) = 60^\circ$ olarak veriliyor. Bu daire dilimi kıvrılarak dik dairesel koni oluşturulursa oluşan cismin yüksekliği kaç br olur?



9. Yandaki dik dairesel konide $|AB| = 2br, |BO| = 4$ br dir.1 . şekildeki dik dairesel koni ters çevrilerek 2. şekildeki konuma getirilirse bu koninin içindeki suyun yüksekliği kaç br olur?



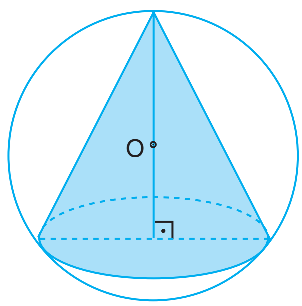
10. Yarıçapının uzunluğu 9 br olan kürenin yüzey alanını ve hacmini bulunuz.

11. Çapının uzunluğu $6\sqrt{3}$br uzunluğunda olan kürenin içine çizilebilecek en büyük hacimli küpün hacmini bulunuz.

12. Yarıçapının uzunluğu $2\sqrt{3}$cm olan bir küre yontularak elde edilebilecek en büyük hacimli küp oluşturuluyor. Oluşturulan küpün hacmi kaç cm^3tür?

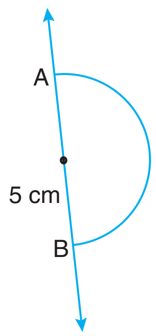
13. Hacmi 64 cm^3 olan küp şeklindeki tahta bir blok yontularak küre biçiminde bir top yapılmak isteniyor. Topun yüzeyi en çok kaç π cm^2 olur?

14. Yandaki şekilde görüldüğü gibi bir dik dairesel koni, O merkezli bir küre içine yerleştiriliyor. Kürenin yarıçapının uzunluğu 5 br, koninin taban yarıçapının uzunluğu 4 br ise koninin hacmini bulunuz. (π = 3,14 alınız.)



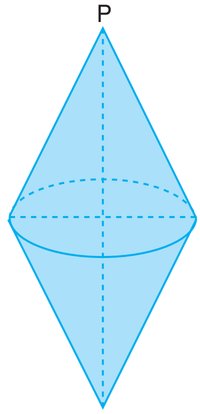
15. Yandaki şekilde M ve N merkezli yarım küreler çizilmiştir. Yarım küreler birbirine M, A ve B noktalarında teğettir. Kürelerin hacimlerinin oranını bulunuz.

16. Yandaki şekilde yarıçapının uzunluğu 5 cm olan yarım daire AB doğrusu etrafında 180° döndürülüyor. Oluşan cismin yüzey alanını bulunuz.



6. DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Yandaki şekil, iki tane dik dairesel koninin tabanlarının birleştirilmesiyle elde edilmiştir. Koninin taban yarıçapının uzunluğu $2\sqrt{2}$ br ve tabanlarının birleşmesiyle oluşan cismin hacmi 64π br^3 ise P ve T noktaları arasındaki uzaklık kaç br dir?



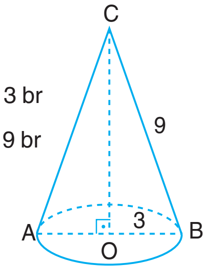
A) 30 B) 28 C) 26
D) 24 E) 21

2. Taban yarıçapın uzunluğu 10 cm uzunluğunda, yüksekliği 24 cm olan dik dairesel koni şeklindeki bir kap tepe noktası aşağıda olmak üzere dik bir şekilde tutuluyor. Bu koni saniyede 2π cm^3 su akıtan bir muslukla doldurulmak isteniyor. Dik dairesel koni şeklindeki kap kaç saniyede dolar?

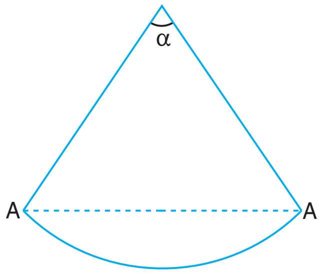
A) 450 B) 400 C) 360 D) 300 E) 240

3. 1. şekildeki dik dairesel koninin yan yüzünün açınımı 2. şekilde gösterilmiştir. $|OC|$ dik dairesel silindirin yüksekliği, $|BC| = 9$ br, $|OB| = 3$br olduğuna göre α kaç derecedir?

$|OB| = 3$ br
$|BC| = 9$ br



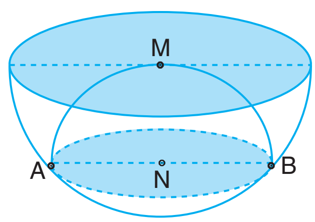
1. şekil



2. şekil

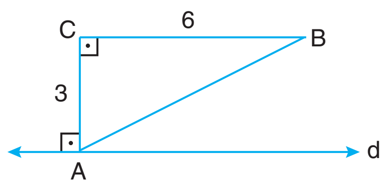
A) 90° B) 95°
C) 100° D) 110°
E) 120°

4. Yarıçapının uzunluğu $3\sqrt{2}$ br, hacmi 36π br^3 olan dik dairesel koninin ana doğrusunun uzunluğu kaç br dir?



A) $5\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{6}$
D) 4 E) $2\sqrt{3}$

5. ABC dik üçgeni d doğrusu etrafında 360° döndürülüyor. Oluşan cismin hacmi kaç br^{3}tür?



A) 12π B) 20π C) 24π
D) 36π E) 40π

6. Yarıçapının uzunluğu 8 br olan bir kürenin yüzey alanı kaç br^2 dir?

A) 128 π B) 200 π C) 240 π D) 252 π E) 256 π

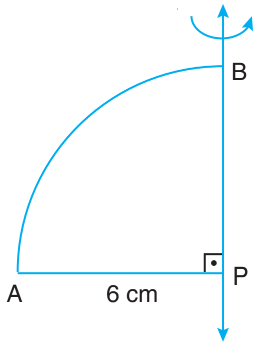
7. Hacmi 2304π br^3 olan kürenin yarıçapının uzunluğu kaç br dir?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 18 E) 21

8. Yüzey alanı 176 π br^2 olan kürenin içine yerleştirilebilen en büyük hacimli küpün cisim köşegen uzunluğu kaç br dir?

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{11}$ C) $2\sqrt{11}$ D) $4\sqrt{11}$ E) 11

9. Şekildeki P merkezli çeyrek dairenin BP doğrusu etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan şeklin tüm yüzey alanı kaç cm^2 dir?



$[AP] \perp BP$

$|AP| = 6$ cm

A) 72 π B) 84 π C) 108 π
D) 120 π E) 124 π

10. Asfaltlama çalışması yapan bir kişi, yarıçapının uzunluğu 0,5 m ve yüksekliği (uzunluğu) 2 m olan dik dairesel silindir şeklindeki bir silindir kullanıyor. Silindir 5 tur attığında kaç m^2 lik asfalt düzlenmiş olur?

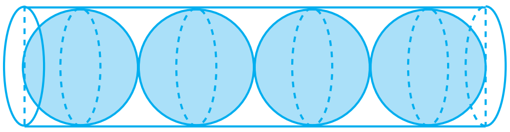
A) 4 π B) 6 π C) 8 π D) 9 π E) 10 π

11. Kağan, doğum günü partisinde kullanmak üzere dik dairesel koni şeklinde karton şapkalardan yapmak istiyor. Bu şapkaların çapının uzunluğunun 24 cm ve yüksekliğinin 16 cm olmasını istiyor. Buna göre her bir şapka için en az kaç cm^2 karton kullanmalıdır?



A) 120 π B) 180 π C) 240 π
D) 256 π E) 280 π

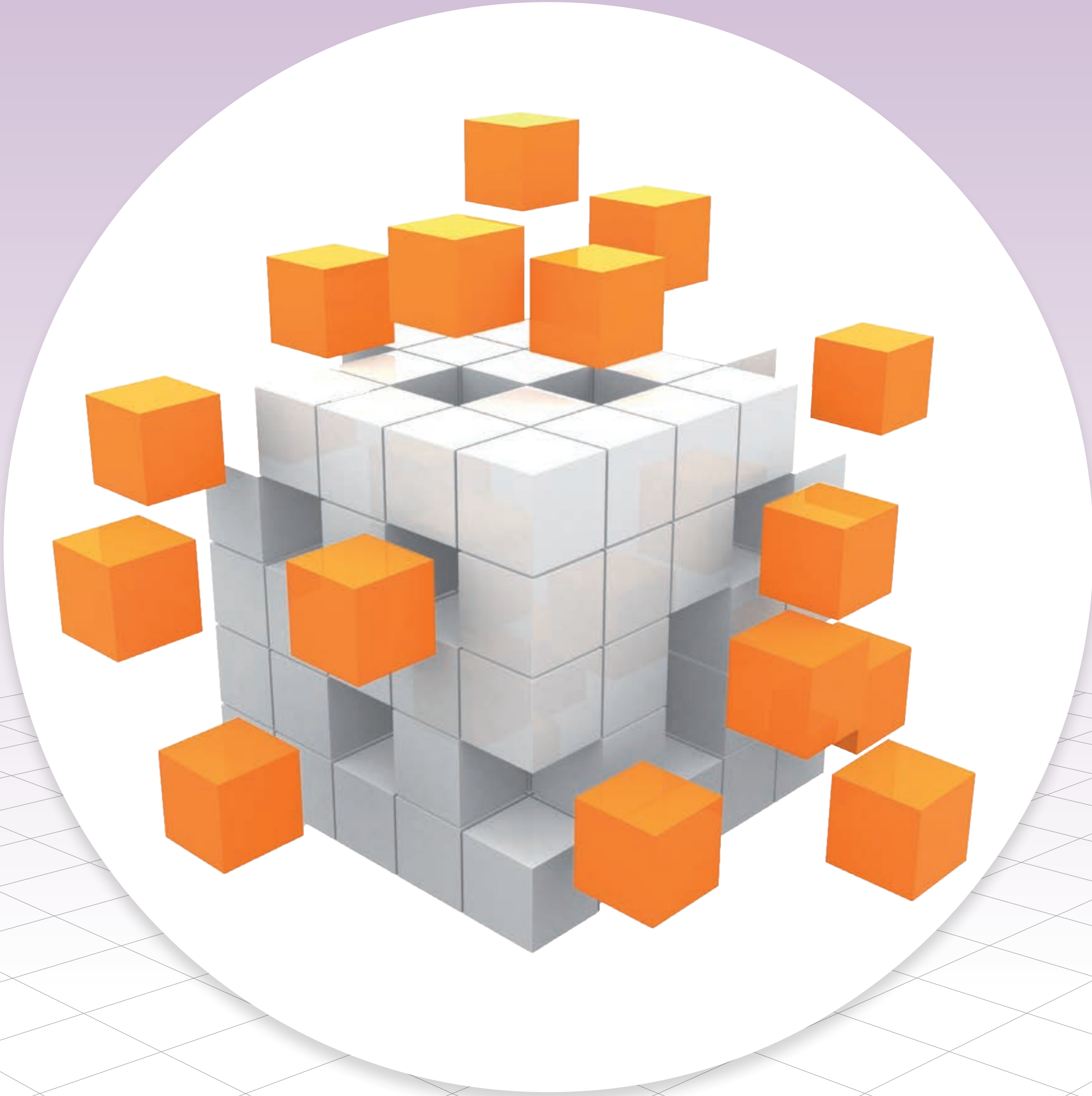
12.



Yukarıda şekildeki gibi dik dairesel silindir bir kutu içerisine yarıçapının uzunluğu 2 cm olan, eş küreler biçiminde 4 top yerleştirilmiştir. Toplar silindirin yan yüzeyine ve tabanına teğet olduğuna göre silindir ile küreler arasında kalan hacim kaç cm^3 tür?

A) $\frac{64\pi}{3}$ B) 32π C) $\frac{64\pi}{5}$ D) 16π E) $\frac{8\pi}{3}$

7. OLASILIK



7.1. KOŞULLU OLASILIK

7.1.1. Koşullu Olasılık

İki kişi arasında bir kura çekimi yapılmak istendiğinde genellikle bir madenî parayı havaya atarak “Yazı mı, tura mı?” diye sorarız. 10 kişi arasından bir seçim yapılmak istense herkesin ismini ayrı ayrı küçük kâğıtlara yazıp, bir torbaya koyarız. Her iki durumda da biliriz ki bir kişinin seçilme şansı diğerleri ile aynıdır. Yazı ve tura gelme olasılığı $\frac{1}{2}$, 10 kişiden birinin seçilme olasılığı ise $\frac{1}{10}$ dur.





Peki 5 kız, 5 erkek öğrencinin isimlerinin yazılı olduğu kâğıtlar bir torbaya konularak rastgele bir kâğıt çekiliyor. Çekilen kâğıtta bir kız öğrencinin isminin yazılı olduğu bilindiğine göre bu belirli 5 isimden bir ismin çıkma olasılığı sizce kaçtır?

A ile B, E eş olumlu örnek uzayının iki olayı olsun. B olayının gerçekleşmiş olması hâlinde, A olayının gerçekleşmesi olasılığına **A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığı** denir.

$P(A|B)$ şeklinde gösterilir. $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ dir. $(P(B)\neq 0)$

A ile B eş olumlu bir E örnek uzayında iki olay ise

$P(A|B)=\dfrac{s(A\cap B)}{s(B)}$ dir. $(s(B)\neq 0)$

Örnek

İki zar birlikte atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 7 olduğu bilindiğine göre sayılardan en az birinin 2 olma olasılığını bulalım.

Çözüm

Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 7 olma olayı B, bu sayılardan en az birinin 2 olma olayı A olsun.



(5,2) (2,5) (4,3) (3,4) (6,1) (1,6)

$B = \{(5,2),(2,5),(4,3),(3,4),(6,1),(1,6)\}$ ise $s(B) = 6$ ve üste gelen yüzeyindeki sayılardan en az birinin 2 olma olayı,

$A = \{(5,2),(2,5)\}$ ise $s(A) = 2$ ve $s(A \cap B) = 2$ dir.

E, eş olumlu örnek uzay olduğundan $P(A|B) = \dfrac{s(A \cap B)}{s(B)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ olur.

Örnek

İki madenî paranın birlikte atılması deneyinin sonucunda en az birinin yazı geldiği bilindiğine göre ikisinin de yazı gelmesi olasılığını bulalım.

Çözüm

En az birinin yazı olması olayı B olsun.



(Y,Y) (Y,T) (T,Y)

$B = \{(Y,Y),(Y,T),(T,Y)\}$ ise $s(B) = 3$ tür.

İkisinin de yazı gelmesi olayı A olsun.

$A = \{(Y,Y)\}$ ise $s(A) = 1$ dir. Buna göre $s(A \cap B) = 1$ olup

$P(A|B) = \dfrac{s(A \cap B)}{s(B)} = \dfrac{1}{3}$ elde edilir.

Örnek

30 kişilik bir öğrenci grubunda, İngilizce kursuna giden 20 kişi, Fransızca kursuna giden 16 kişi ve her iki kursa da gitmeyen 8 kişi vardır.

Rastgele seçilen iki kişinin Fransızca kursuna gittiği bilindiğine göre İngilizce kursuna gitmeme olasılığını bulalım.

Çözüm

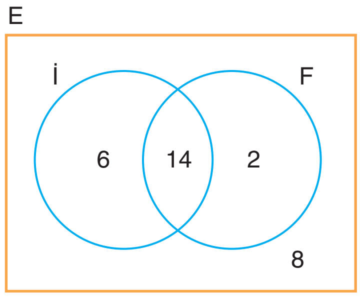
İngilizce kursuna gidenlerin kümesi İ ve Fransızca kursuna gidenlerin kümesi F olsun. Buna göre $s(İ) = 20$ ve $s(F) = 16$ dır.

8 kişi hiçbir kursa gitmediğine göre $30 - 8 = 22$ kişi bu kurslardan en az birine gitmektedir.

$s(İ \cup F) = s(İ) + s(F) - s(İ \cap F)$

$22 = 20 + 16 - s(İ \cap F)$

$s(İ \cap F) = 14$ tür.



Seçilen kişinin Fransızca kursuna gitme olayı F ise $s(F) = 16$ ve bunların içinden İngilizce kursuna gitmeme olayı İ′ ise $s(İ') = 2$ dir.

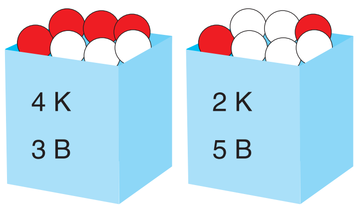
O hâlde, $P(İ') = \dfrac{s(İ')}{s(F)} = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$ dir.

Örnek

1. kutuda 4 kırmızı, 3 beyaz; 2. kutuda 2 kırmızı, 5 beyaz renkli özdeş top vardır. Buna göre

a) Rastgele çekilen bir topun 2. kutudan çekildiği bilindiğine göre kırmızı olma olasılığını bulalım.

b) Rastgele çekilen bir topun beyaz olduğu bilindiğine göre 2. kutudan çekilmiş olma olasılığını bulalım.



Çözüm

a) 2. kutudan çekildiği bilindiğine göre toplam 7 top vardır. Kutudan herhangi bir top çekme olayının kümesi B, kırmızı top çekme olayının kümesi A olsun.

$s(B) = 7, s(A) = 2$ ve $s(A \cap B) = 2$ dir.

Buna göre $P(A|B) = \dfrac{s(A \cap B)}{s(B)} = \dfrac{2}{7}$ dir.

b) Çekilen topun beyaz olma olaylarının kümesi B ise 8 tane beyaz top olduğundan $s(B) = 8$ dir. Bu topun 2. kutudan çekilme olaylarının kümesi A ise 2. kutuda 5 tane beyaz top olduğundan $s(A \cap B) = 5$ tir.

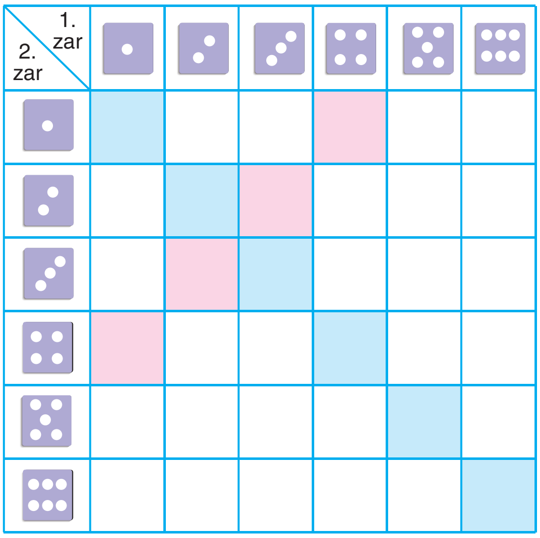
Buna göre $s(A \cap B) = 5$ ise

$P(A|B) = \dfrac{s(A \cap B)}{s(B)} = \dfrac{5}{8}$ bulunur.

Örnek

Arka arkaya atılan iki zarın üst yüzüne gelen sayıların eşit olmadığı bilindiğine göre toplamlarının 5 olma olasılığını bulalım.

Çözüm



Yandaki tabloda mavi renkli bölgeler, zarların üst yüzüne gelen sayıların eşit olma olaylarını göstermektedir. Buna göre üste gelen sayıların eşit olmama olaylarının kümesi B olsun.

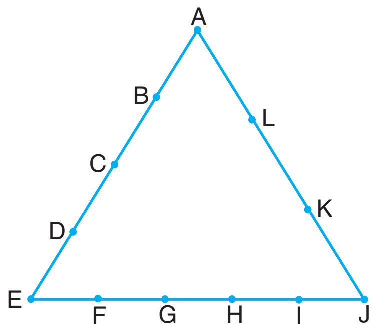
$s(B) = 30$ olur.

Pembe renkli alanlar, zarların üst yüze gelen sayıların toplamlarının 5 olma olayını göstermektedir. Bu olayların kümesi A olsun.

$s(A) = 4$ tür. Bu durumda üste gelen yüzeylerin eşit olmayıp toplamlarının 5 olma olayı $A \cap B$ ve $A \subset B$ olduğundan $s(A \cap B) = s(A)$ olur. Buna göre

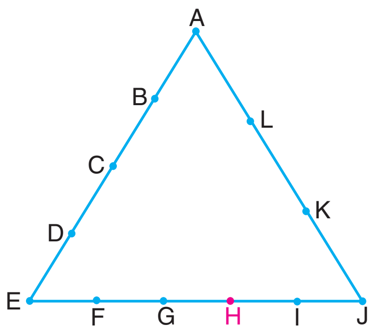
$$P(A|B) = \frac{s(A \cap B)}{s(B)} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \text{ tir.}$$

Örnek



Yandaki üçgenin üzerinde verilen 12 noktadan rastgele 3 tanesi seçiliyor. Seçilen noktalardan birisinin H olduğu bilindiğine göre köşeleri bu noktalar olan üçgen oluşturma olasılığını bulalım.

Çözüm



Verilen 12 noktadan H noktası sabit olduğundan geriye kalan 11 noktadan 2 tanesi

$$\binom{11}{2} = \frac{1 \cdot 10}{2} = 55 \text{ farklı şekilde seçilebilir.}$$

E, F, G, I, J noktalarından seçilen 2 şer nokta H noktası ile doğrusal olduğundan üçgen çizilemez.

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

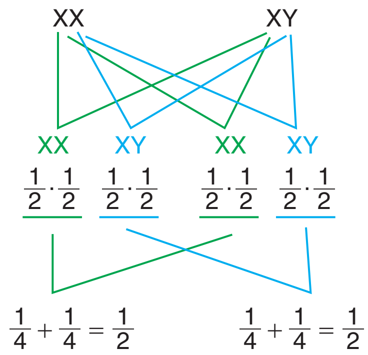
H noktasının sabit olma koşuluna bağlı olasılık P(H), üçgen çizilebilme olasılığını $P(H \cap Ü)$ ile gösterelim.

$$P(Ü|H) = \frac{P(H \cap Ü)}{P(H)} = \frac{55 - 10}{55} = \frac{45}{55} = \frac{9}{11} \text{ olur.}$$

7.1.2. Bağımlı ve Bağımsız Olaylar

Cinsiyeti, erkekten gelen kromozom belirler. Kadının kromozom yapısı XX, erkeğin kromozom yapısı ise XY şeklindedir. Bu kromozomlar arasındaki çaprazlamalar çocuğun cinsiyetini belirler.

Şekildeki gösterimleri inceleyerek doğacak bebeğin kız veya erkek olma olasılığını söyleyiniz.



A ve B aynı örnek uzaya ait iki olay olsun. Bu olaylardan birinin gerçekleşmesi veya gerçekleşmemesi, diğerinin gerçekleşmesi olasılığını etkilemiyorsa A ve B olaylarına **bağımsız olaylar** denir.

A ve B bağımsız olaylar ve $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ ise

A ve B olayının gerçekleşmesi olasılığı,

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ dir.

A veya B olayının gerçekleşmesi olasılığı,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.

Eğer iki olay bağımsız değilse bu olaylara **bağımlı olaylar** denir.

Örnek

Bir madenî para ve bir zar birlikte atılıyor. Paranın yazı ve zarın çift sayı gelme olasılığını bulalım.

Çözüm

Paranın yazı ve zarın çift sayı gelmesi olaylarının gerçekleşmesinin, bu olayların birbirlerinin gerçekleşme olasılıklarına bir etkisi yoktur. Bu durumda bu olaylar bağımsız olaylardır.

Paranın yazı gelmesi olayı A ise $P(A) = \frac{1}{2}$, zarın çift sayı gelmesi olayı B ise $B = \{2, 4, 6\}$ olup $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ dir. Buna göre paranın yazı, zarın çift sayı gelmesi olasılığı,

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ olur.

ETKİNLİK

Özdeş iki zar arka arkaya atılıyor. Buna göre tabloda ilk satırdaki sorunun çözümü yapılmıştır. Diğer soruları siz çözünüz.

1. zarın 3 ve diğerinin tek gelme olasılığı kaçtır?	1. zar — 2. zar Olaylar: $A = \{3\}$ — $B = \{1, 3, 5\}$ (bağımsız olaylar) $s(A) = 1$ — $s(B) = 3$ $E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, — $E_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $s(E_1) = 6$ ise $P(A) = \frac{1}{6}$ dır. $s(E_2) = 6$ ise $P(B) = \frac{3}{6}$ dır. $P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$ dir.
1. zarın çift ve diğerinin tek gelme olasılığı kaçtır?	
1. zarın 3 ten büyük bir sayı ve diğerinin 1 den büyük bir sayı gelme olasılığı kaçtır?	
1. zarın asal sayı ve 2. zarın herhangi bir sayı gelme olasılığı kaçtır?	

A ve B bağımsız olaylar ise $A \subset E_1$ ve $B \subset E_2$ olacak biçimde örnek uzay E_1 ve E_2 gibi iki ayrık uzaya ayrılabilir.

Örnek

Bir madenî para ve bir zar birlikte atılıyor. Paranın tura veya zarın asal sayı gelme olasılığını bulalım.

Çözüm

$P(A \cup B)$ yi bulmalıyız.

Paranın tura gelme olayı,

$A = \{T\}$ ise $s(A) = 1$ ve

$E_1 = \{T, Y\}$ ise $s(E_1) = 2$ dir.

Buna göre $P(A) = \frac{s(A)}{s(E_1)} = \frac{1}{2}$ dir.

Zarın asal sayı gelme olayı,

$B = \{2, 3, 5\}$ ise

$s(B) = 3$ ve $E_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olup

$s(E_2) = 6$ dır.

$P(B) = \frac{s(B)}{s(E_2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ dir.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \overbrace{P(A \cap B)}^{P(A).P(B)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ olur.}$$

Örnek

Bir zar atılıyor. Zarın üste gelen yüzündeki sayının,

a) 2 den büyük ve tek sayı gelme olasılığını,

b) 2 den büyük veya tek sayı gelme olasılığını bulalım.

Çözüm

a) 1. olay: $A = \{3, 4, 5, 6\}$ (2 den büyük sayı)

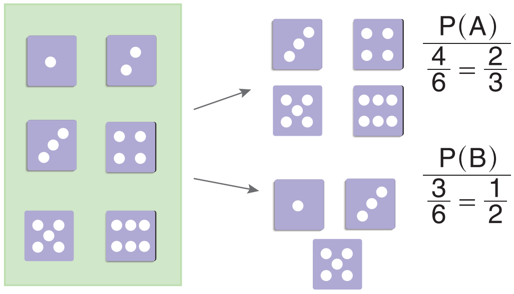
2. olay: $B = \{1, 3, 5\}$ (tek sayı)

(A ve B): $A \cap B = \{3, 5\}$

Örnek uzay: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A ve B olayının olma olasılığı:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$



b) **1. yol**

1. olay: $A = \{3, 4, 5, 6\}$ (2 den büyük sayı)

2. olay: $B = \{1, 3, 5\}$ (tek sayı)

(A veya B): $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

Örnek uzay: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(A \cup B) = \frac{s(A \cup B)}{s(E)} = \frac{5}{6}$

2. yol

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

Örnek

Okçuluk sporu ile uğraşan Kağan, Yağız ve Zeynep isimli üç arkadaşın her birinin hedefi vurma olasılıkları sırası ile $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}$ ve $\frac{5}{6}$ dır. Buna göre,

a) Hedefi sadece Kağan'ın vurma olasılığı kaçtır?

b) Hedefin vurulmama olasılığı kaçtır?

Çözüm

a) Hedefin sadece Kağan tarafından vurulacaksa yağız ve Zeynep'in hedefi vuramamış olması gerekir.

Yağız'ın hedefi vurma olasılığı $\frac{3}{5}$ ise vurmama olasılığı $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ tir.

Zeynep'in hedefi vurma olasılığı $\frac{5}{6}$ ise vurmama olasılığı $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ dır.

Bu durumda hedefi sadece Kağan'ın vurma olasılığı $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{20}$ olur.

b) Hedefin vurulmama olasılığını bulmak için herbirinin hedefi vuramama olasılıklarını birbiri ile çarpmalıyız. Buna göre

Kağan'ın hedefi vuramama olasılı $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$,

Zeynep ve Yağızın hedefi vuramama olasılığı sırası ile $\frac{2}{5}$ ve $\frac{1}{6}$ ise istenilen olasılık,

$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{60}$ olur.

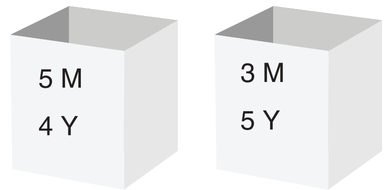
7.1.3. Bileşik Olaylar

Birden fazla basit olaydan oluşan olaya **bileşik olay** denir.

Örnek

1. kutuda 5 mavi, 4 yeşil zarf; 2. kutuda 3 mavi, 5 yeşil zarf vardır. 1. kutudan rastgele bir zarf çekilip rengine bakılmadan 2. kutuya atılıyor.

Buna göre 2. kutudan rastgele alınan bir zarfın yeşil olma olasılığını bulalım.

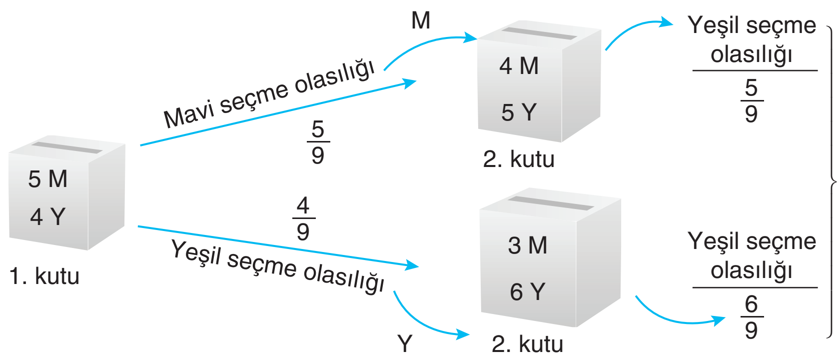


1. kutu 2. kutu

Çözüm

1. kutudan alınan zarf mavi veya yeşil olabilir. Buna göre 2. kutudan alınan zarfın yeşil olma olaylarının kümesi A olsun.

1. kutu	2. kutu	1. kutu	2. kutu
M	Y	Y	Y



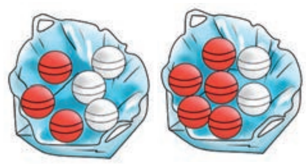
$$P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{6}{9}$$

$$= \frac{25}{81} + \frac{24}{81}$$

$$= \frac{49}{81} \text{ olur.}$$

Örnek

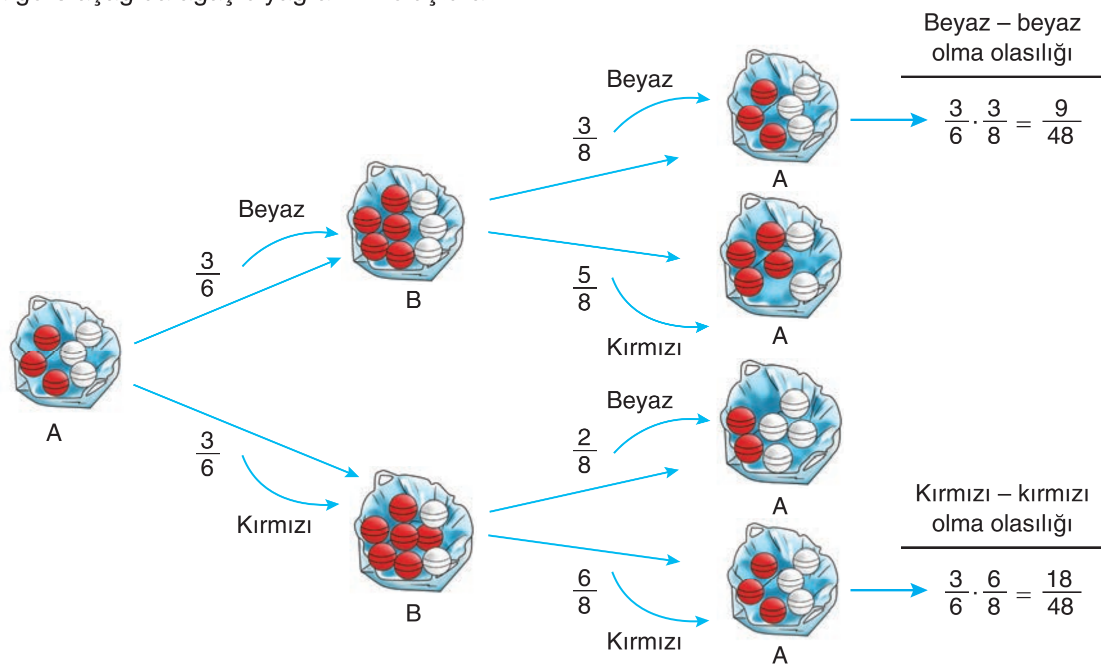
A torbasında 3 beyaz, 3 kırmızı; B torbasında 2 beyaz, 5 kırmızı özdeş top vardır. A torbasından rastgele çekilen bir top, B torbasına atılıyor. Daha sonra B torbasından rastgele çekilen bir top ise A torbasına atılıyor. Başlangıçtaki durumu elde etme olasılığını bulalım.



A B

Çözüm

Başlangıçtaki durumun değişmemesi için A ve B torbalarından çekilen renklerin aynı olması gerekir. Buna göre aşağıda ağaç diyagramını oluşturalım.



Başlangıçtaki durumu elde etme olasılığı $= \frac{9}{48} + \frac{18}{48} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}$ olur.

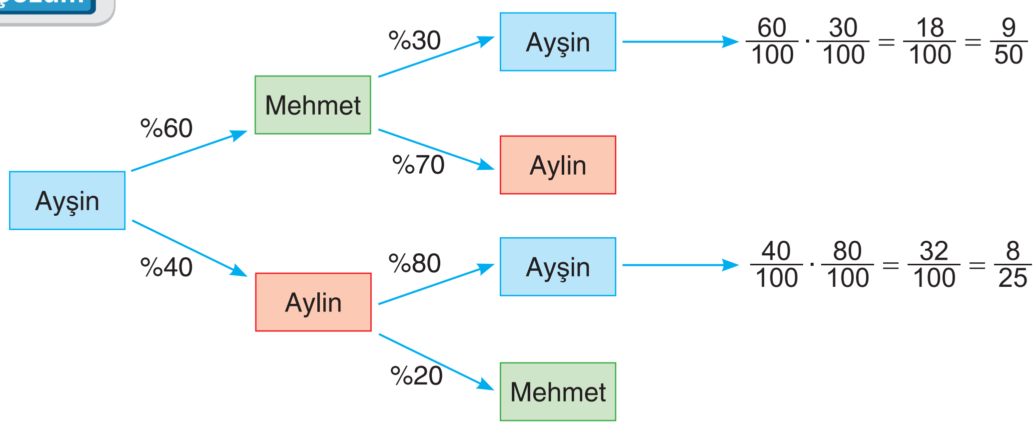
Örnek

Ayşin, Mehmet ve Aylin'in oynadığı bir oyunda ebe olan kişi rastgele diğerlerinden birinin ismini seçmekte ve seçilen kişi ebe olmaktadır. Yeni ebe olan kişi de benzer şekilde diğer iki kişiden birini rastgele seçmektedir. Buna göre;

- Ayşin ebe ise %60 olasılıkla Mehmet'i, %40 olasılıkla Aylin'i seçer.
- Mehmet ebe ise %30 olasılıkla Ayşin'i, %70 olasılıkla Aylin'i seçer.
- Aylin ebe ise %80 olasılıkla Ayşin'i, %20 olasılıkla Mehmet'i seçer.

Bu oyunda ilk Ayşin ebe ise üçüncü sıradaki ebenin yine Ayşin olma olasılığını bulalım.

Çözüm



Buna göre üçüncü sırada tekrar Ayşin'in ebe olma olasılığı $\frac{9}{50} + \frac{8}{25} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$ olur.

UYGULAYALIM 7-1

1. Bir zar atılıyor. Zarın üste gelen yüzeyindeki sayının 5 ten küçük olduğu bilindiğine göre çift sayı olma olasılığını bulunuz.

2. Bir madenî para ve bir zar birlikte atılıyor. Buna göre

a) Paranın yazı ve zarın 5 gelme olasılığını,

b) Paranın yazı veya zarın 5 gelme olasılığını,

c) Paranın tura ve zarın tek sayı gelme olasılığını bulunuz.

3. İki zar birlikte atılıyor. Zarların üste gelen yüzeylerindeki sayıların toplamının 6 olduğu bilindiğine göre bu sayıların eşit olma olasılığını bulunuz.

4. Biri mavi, biri sarı iki zar atılıyor. Mavi zarın 4 ten büyük bir sayı geldiği bilindiğine göre zarların üste gelen yüzeyindeki sayıların toplamının 6 dan büyük sayı olma olasılığını bulunuz.

5. Bir torbada özdeş 3 kırmızı, 5 mavi top vardır. Yerine konmaksızın arka arkaya, rastgele 2 top çekiliyor. Buna göre

a) Birinci topun kırmızı, ikinci topun mavi olma olasılığı kaçtır?

b) İki topun da kırmızı olma olasılığı kaçtır?

c) Topların aynı renkte olma olasılığı kaçtır?

6. Bir torbada özdeş 3 kırmızı, 4 mavi ve 2 yeşil top vardır. Buna göre



a) Rastgele çekilen bir topun kırmızı gelme olasılığı kaçtır?

b) Geri konulmaksızın, arka arkaya çekilen 3 topun mavi gelme olasılığı kaçtır?

c) Geri konulmaksızın, arka arkaya çekilen 3 topun farklı renklerde gelme olasılığı kaçtır?

7. A ve B olayları bağımsız olaylar olmak üzere

$P(A) = \frac{3}{4}$,

$P(B) = \frac{2}{3}$ olduğuna göre tabloda verilen olasılıkları boş bırakılan alanlarda hesaplayınız.

$P(A \cap B)$	
$P(A \cup B)$	
$P(A')$	
$P(B')$	

8. Bir hedefe her atış yaptığında Ahmet'in hedefi vurma olasılığı $\frac{2}{3}$ tür. Ahmet üç atış yapıyor. Buna göre Ahmet'in;

a) Üç atışta da hedefi vurma olasılığı kaçtır?

b) Üç atışta da hedefi vuramama olasılığı kaçtır?

c) İlk iki atışta hedefi vurup 3. atışta vuramama olasılığı kaçtır?

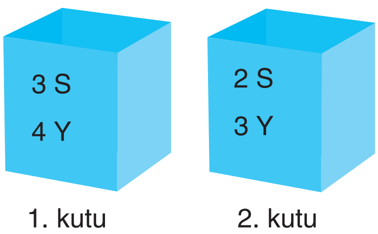
ç) Üç atıştan birinde hedefi vurma olasılığı kaçtır?

9. 30 kişilik bir sınıfta 18 kişi İngilizce, 17 kişi Fransızca bilmektedir. İngilizce ve Fransızca dillerinden yalnız birini bilen 15 kişi bulunmaktadır.

a) Sınıftan rastgele seçilen bir kişinin her iki dili de bilme olasılığı kaçtır?

b) Rastgele seçilen bir kişinin bu dillerden en az birini bildiği bilindiğine göre bu kişinin İngilizce biliyor olma olasılığı kaçtır?

10. 1. kutuda özdeş 3 sarı, 4 yeşil; 2. kutuda 2 sarı, 3 yeşil bilye vardır.
Buna göre

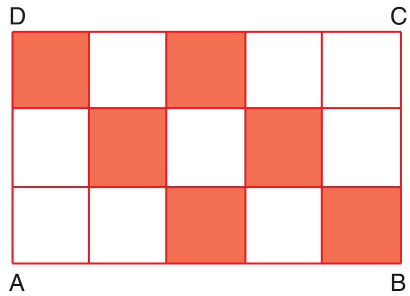


a) 1. kutudan bir bilye alınıp 2. kutuya atılıyor. Bu durumda 2. kutudan rastgele çekilen bir bilyenin yeşil olma olasılığı kaçtır?

b) 1. kutudan bir bilye alınıp 2. kutuya atılıyor. Ardından 2. kutudan bir bilye alınıp 1. kutuya atılıyor. Buna göre ilk durumla son durumun aynı olma olasılığı kaçtır?

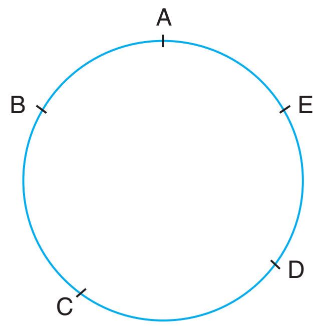
11. 5 kız, 3 erkek öğrenci arasından rastgele seçilen 4 öğrenciden ikisinin kız ve ikisinin erkek öğrenci olma olasılığını bulunuz.

12. ABCD dikdörtgeni eş karelere bölünmüştür. ABCD dikdörtgeninin içinden rastgele seçilen bir noktanın renkli bölgelerden seçilmiş olma olasılığını bulunuz.



13. 3 erkek ve 5 bayan çalışandan oluşan bir grup içerisinden 3 kişilik bir komisyon oluşturulacaktır. Komisyonda, en az bir erkek bulunma olasılığını bulunuz.

14. A, B, C, D ve E noktalarının 3 tanesini köşe kabul eden üçgenlerden rastgele seçilen bir tanesinin, bir köşesinin B noktası olması olasılığını bulunuz.



15. 20 kişilik bir sınıfta bulunan öğrencilerin 12 tanesi erkektir. Erkeklerin 5 i, kızların 3 ü gözlüklü olduğuna göre sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin kız veya gözlüklü olma olasılığı kaçtır?

16. Kağan'ın çantasında eş özelliklerde, matematik, fizik, ingilizce ve tarih derslerine ait olmak üzere 4 defter bulunmaktadır. Kağan matematik dersinde matematik defterini çantasından çıkarmak için rastgele bir defter çıkarıyor. Defter matematik dersine ait değilse bu defteri çantaya koymadan rastgele bir defter daha çıkarıyor.
Kağan'ın matematik defterini üçüncü denemenin sonunda bulma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

7.2. DENEYSEL VE TEORİK OLASILIK

Ahmet ile Merve isimli iki arkadaş bir okulun en iyi satranç oynayan iki öğrencisidir. Bir satranç turnuvasının finalinde Ahmet ile Merve karşı karşıya gelmektedir. “Bu oyunu kim kazanır?” sorusuna verilen cevapların bazıları Ahmet, bazıları ise Merve olacaktır. Çünkü her ikisinin de oyunu kazanma olasılığı teorik olarak %50 dir. Ancak Ahmet ile Merve'nin daha önce 20 kere satranç oynadıklarını, bu oyunlardan 12 sini Merve'nin, 8 ini ise Ahmet'in kazandığını söylersek aynı soruya verilen cevaplar elbette değişecektir.



Merve oyunu daha çok kazandığından bu oyunu da Merve'nin kazanma şansı daha yüksektir. Ancak yine de “Oyunu kesin Merve kazanır.” diyemeyiz. Merve'nin oyunu kazanma olasılığı deneysel olarak $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ tir.

7.2.1. Deneysel Olasılık ve Teorik Olasılık Arasındaki İlişki

Bazı durumlarda bir olayın gerçekleşme olasılığı yapılan deneylere bağlıdır. Yapılan deneyin sonuçları, istenilen olayın gerçekleşme olasılığı ile ilgili tahminde bulunmamızı sağlar.

Yapılan deneyler sonucunda elde edilen çıktılara dayanarak hesaplanan olasılığa **deneysel olasılık** denir.

Her bir çıktının eş olması durumunda hesaplama yoluyla bulunan olasılığa **teorik olasılık** denir.

Deneysel olasılıkta deneme sayısı arttıkça olasılık değeri teorik olasılık değerine yaklaşır.

Örnek

Bir zar atıldığında üste gelen yüzün 4 olması olayının teorik olasılığını bulalım.

Çözüm

Örnek uzay, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ise $s(E) = 6$ dır.

Üste gelen yüzün 4 olması olayı $A = \{4\}$ ise $s(A) = 1$ dir.

Buna göre $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{6}$ olur.

Örnek

Bir torbada özdeş 4 kırmızı, 3 mavi ve 2 yeşil bilye vardır. Rastgele çekilen bir bilyenin mavi olma olayının teorik olasılığını bulalım.

Çözüm

E örnek uzay olmak üzere $s(E) = 9$ dur. 3 mavi bilye olduğundan $s(M) = 3$ olur. Buna göre rastgele çekilen bir bilyenin mavi olma olasılığı,

$P(M) = \frac{s(M)}{s(E)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ tür.

Örnek

Ahmet'in bir basketbol turnuvasında 100 atışından 60 ı basket oluyor. Ahmet'in 101. atışının basket olma olasılığını teorik ve deneysel olarak hesaplayalım.

Çözüm

Ahmet'in atışlarında basket olması veya basket olmaması olmak üzere 2 farklı durum söz konusudur. Buna göre E örnek uzay olmak üzere $s(E) = 2$ dir. Basket olma olayı A olmak üzere $s(A) = 1$ olduğundan Ahmet'in 101. atışının basket olma olasılığı teorik olarak,

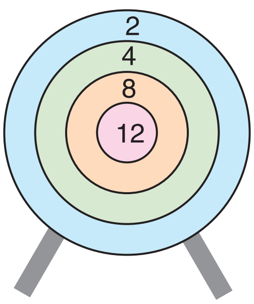
$\frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{2} = 0,50$ dir.

Şimdi 101. atışın basket olma olasılığını deneysel olarak bulalım.

Ahmet'in 100 atışından 60 ı basket olmuştur.

Buna göre Ahmet'in 101. atışının basket olma olasılığı $\frac{60}{100} = 0,60$ olur.

Örnek



Bir okçu hedef tahtasına 20 kere atış yapıyor. 8 kere 12 numaralı alanı, 4 kere 8 numaralı, 2 kere 4 numaralı alanı 4 kere 2 numaralı alanı vuruyor. Diğer atışları hedef tahtasını vuramıyor. Buna göre bu okçunun 21. atışında hedefi 12 numaralı alandan vurma olayının deneysel olasılığını bulalım.

Çözüm

Okçu hedefin 12 numaralı alanını 8 kere vurmaktadır. $s(12) = 8$ olur. Toplam 20 atış yaptığından $s(E) = 20$ dir.

Buna göre 21. atıştan 12 numaralı alanın vurulmasının deneysel olasılığı $\frac{s(12)}{s(E)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ olur.

Örnek

Bir zar atıldığında 2 kere 1; 3 kere 2; 1 kere 3; 1 kere 4; 3 kere 5 ve 2 kere 6 geliyor. Buna göre bu zar tekrar atıldığında 5 gelme olasılığını teorik ve deneysel olarak hesaplayalım.

Çözüm

$s(E) = 6$ ve $s(5) = 1$ olduğundan üste gelen yüzün 5 olma olasılığı teorik olarak $\frac{s(5)}{s(E)} = \frac{1}{6}$ dır.

Şimdi üste gelen yüzün 5 olma olasılığını deneysel olarak hesaplayalım. Zar toplam 12 kere atılmış ve üst yüze 3 kere 5 gelmiştir.

Buna göre üste gelen yüzün 5 olma olasılığı deneysel olarak $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ olur.

Örnek

Funda bir zar atarak üste gelen yüzün 2 olma olasılığını hesaplamak istiyor. Bunun için önce zarı 100 kez atıyor. 18 tanesi 2 geliyor. Zarı 200 kez atıyor. 34 tanesi 2 geliyor. Zarı sabırla 500 kez atıyor, 80 tanesi 2 geliyor. Buna göre atılan zarın üst yüzüne gelen sayının 2 olma olasılığını bulalım.

Çözüm

Üste gelen yüzün 2 olma olasılığı deneysel olarak

100 atıştan 18 tanesi 2 ise 2 gelme olasılığı $\frac{18}{100}$,

200 atıştan 34 tanesi 2 ise 2 gelme olasılığı $\frac{34}{200} = \frac{17}{100}$,

500 atıştan 80 tanesi 2 ise 2 gelme olasılığı $\frac{80}{500} = \frac{16}{100}$ olur.

Şimdi üste gelen yüzün 2 olma olasılığını teorik olarak bulalım.

$s(E) = 6$ ve $s(2) = 1$ olduğundan $\frac{s(2)}{s(E)} = \frac{1}{6}$ olur.

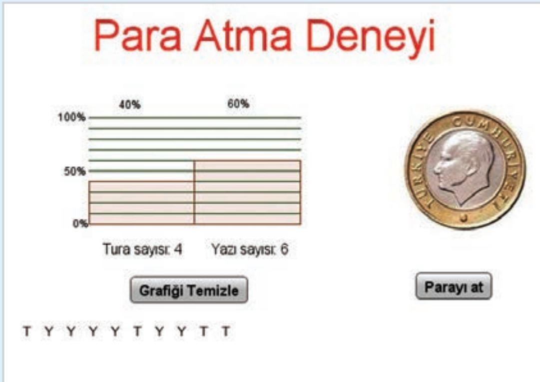
Dikkat edilirse sayı arttıkça olasılık değeri teorik olasılık değerine yaklaşmaktadır.

Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanalım.

• **Parayı at** butonuna tıklayalım. Ya yazı ya da tura gelecektir. Bu olayın olma olasılığı %100 dür.

• **Parayı at** butonuna tekrar basalım. Bu defa para 2 kere atılmış olacaktır. Paranın yazı veya tura gelme olasılıkları her atışta farklı olacaktır.





• Bu şekilde **parayı at** butonuna basarak programın üst kısmında görülen yüzdelikleri gözlemleyelim.

• 100. atışımızı da yaptıktan sonra yazı ya da tura gelme olasılıklarının birbirine daha yakın değerler olduğu gözlemleyeceğiz.

• Deney sayısı arttıkça deneysel olasılık değeri teorik olasılık değerine yaklaşır.

UYGULAYALIM 7-2

1. Bir zar atıldığında üste gelen yüzün 2 olması olasılığını bulunuz.

2. Bir zar art arda 6 kere atıldığında 2 kere 3 geliyor. Bu zar tekrar atıldığında üste gelen sayının 3 gelme olasılığını teorik ve deneysel olarak bulunuz.

3. Kağan'ın 100 penaltı atışından 80 i gol oluyor. Kağan'ın 101. penaltı atışının gol olma olasılığını teorik ve deneysel olarak bulunuz.

4. Bir zar atıldığında 2 kere 3; 1 kere 4; 3 kere 2; 4 kere 6; 2 kere 5 geliyor. Bu zar tekrar atıldığında üste gelen sayının 2 olma olasılığını teorik ve deneysel olarak bulunuz.

5. Burak, bir basketbol turnuvasında ülkemizi temsil edecektir. Ülkemize madalya kazandırmak için çok çalışan Burak, atış denemesi yapmaktadır. Burak'ın 200 basket atışından 180 i sayı oluyor. Burak'ın 201. basket atışının sayı olma olasılığını teorik ve deneysel olarak bulunuz.

7. DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Bir çift zar atılıyor. Zarların üste gelen yüzeylerindeki sayılar için aşağıdaki tabloda boş bırakılan alanları doldurunuz.

a) Zarların aynı gelme olasılığı kaçtır?	
b) Zarların farklı gelme olasılığı kaçtır?	
c) Sayıların toplamlarının 8 olma olasılığı kaçtır?	
ç) Sayılardan birinin tek, diğerinin çift sayı olma olasılığı kaçtır?	
d) Sayıların toplamlarının 14 olma olasılığı kaçtır?	
e) Sayıların toplamlarının en az 2 olma olasılığı kaçtır?	

2. Bir madenî para iki kez atılıyor. Madenî paranın birinci atışta tura geldiği bilindiğine göre ikinci atışta yazı gelme olasılığı kaç olur?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{8}$ E) 0

3. Bir çift zar atıldığında zarların üste gelen yüzeylerindeki sayıların toplamının 12 olduğu biliniyor. Sayıların ikisinin de çift sayı olma olasılığı kaç olur?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

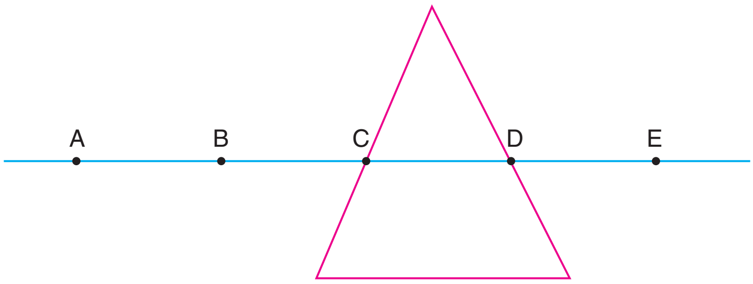
4. İki torbadan birincisinde 3 kırmızı, 5 mavi; ikincisinde 4 kırmızı, 4 mavi bilye vardır. Torbalardan biri rastgele alınıp içinden bir bilye alınırsa bu bilyenin kırmızı olma olasılığı kaç olur?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{7}{9}$ D) $\frac{7}{16}$ E) $\frac{9}{20}$

5. İki torbadan birincisinde 6 kırmızı, 3 mavi; ikincisinde 5 kırmızı, 2 mavi bilye vardır. Torbalardan biri rastgele alınıp içinden bir bilye çekiliyor. Bu bilyenin kırmızı olduğu biliniyorsa birinci torbadan çekilmiş olma olasılığı kaç olur?

A) $\frac{5}{11}$ B) $\frac{6}{11}$ C) $\frac{6}{9}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{5}{16}$

6.



Şekildeki A, B, C, D, E noktaları bir doğru ve C, D noktaları bir üçgen üzerindedir. Bu noktalardan rastgele seçilen iki noktadan yalnız birinin üçgene ait olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{7}{10}$

7. Bir torbada 3 beyaz, 4 kırmızı ve 6 mavi bilye vardır. Yerine konulmaksızın rastgele çekilen 2 bilyeden birincinin beyaz, diğerinin kırmızı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{11}$ E) $\frac{1}{13}$

8. A torbasında 5 beyaz, 3 kırmızı; B torbasında 3 beyaz, 5 kırmızı top vardır. Aynı anda her iki torbadan birer top alınıyor ve öteki torbaya (A torbasından alınıp B torbasına, B torbasından alınıp A torbasına) atılıyor.

Bu işlemin sonucunda torbalardaki kırmızı ve beyaz top sayılarının başlangıçtakiyle aynı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{9}{32}$ B) $\frac{11}{32}$ C) $\frac{13}{32}$ D) $\frac{15}{32}$ E) $\frac{19}{32}$

9. 4 beyaz, 4 mavi, 4 kırmızı topun bulunduğu bir torbadan rastgele alınan 3 topun her birinin farklı renkte olması olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{7}{15}$ D) $\frac{12}{47}$ E) $\frac{16}{55}$

10. Bir zar atıldığında üste gelen yüzün 5 olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

11. Bir zar art arda 10 kez atılıyor. 4 kere 2 geliyor. Bu zar tekrar atıldığında üste gelen sayının 2 olmasının deneysel olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) 1

12. Yağız'ın 50 basket atışından 40 ı sayı oluyor. Yağız'ın 51. atışının sayı olmasının deneysel olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) 1

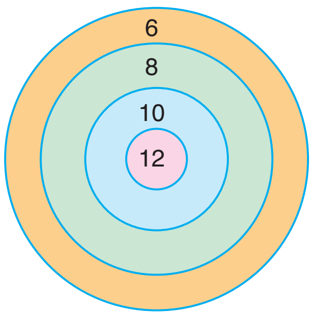
13. Bir zar atıldığında 3 kere 1; 2 kere 4; 4 kere 2; 1 kere 5; 4 kere 6 geliyor. Buna göre bu zar tekrar atıldığında 2 gelme olasılığı deneysel olarak kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{2}{7}$

14. Alp'in 10 penaltı atışından 8 i gol oluyor. Alp'in 11. atışının gol olmasının deneysel olasılığı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{5}$

15. Hedef tahtasına atılan ok atışlarında 5 kere 12; 3 kere 10; 4 kere 8; 2 kere 6 geliyor. 2 kere ise hiç isabet etmiyor. Buna göre tekrar atılan okun hedefi 12 den vurma olasılığı kaçtır?



A) $\frac{5}{16}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{16}$

D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

UYGULAYALIM VE DEĞERLENDİRME SORULARI CEVAP ANAHTARI

1. TRİGONOMETRİ

UYGULAYALIM 1-1

1.

a) Yönü: Negatif
Başlangıç kenarı: [OA
Bitim kenarı: [OB

b) Yönü: Pozitif
Başlangıç kenarı: [OM
Bitim kenarı: [ON

c) Yönü: Pozitif
Başlangıç kenarı: [OR
Bitim kenarı: [OP

2.

Derece	900°	450°	−45°	−420°	2970°	324°
Radyan	5π	$\frac{5\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{3}$	$\frac{33\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{5}$

3.

a) 74° 44′
b) 10° 45′
c) 64° 36′

4. $m(\widehat{C}) = 44°$

5.

```
  52° 18′  5″          52° 18′  5″
  24° 32′ 16″          24° 32′ 16″
−                    +
-------------        -------------
  27° 45′ 49″          76° 50′ 21″
```

6. $m(\widehat{C}) = 101°\ 40′$

7.

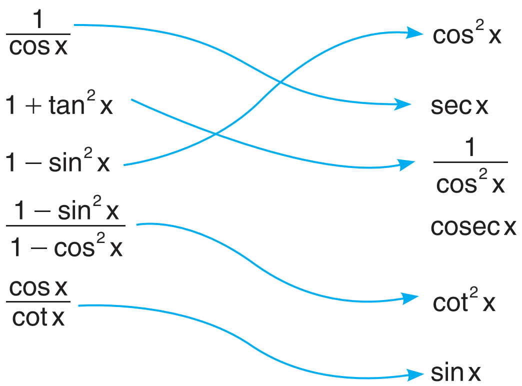
Açının ölçüsü	790°	−1285°	9275°	$\frac{20\pi}{3}$	$-\frac{25\pi}{4}$	$\frac{95\pi}{7}$
Açının esas ölçüsü	70°	155°	275°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{7}$

UYGULAYALIM 1-2

1.

$\sin 0^\circ = 0$	$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos 0^\circ = 1$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan 0^\circ = 0$	$\tan 45^\circ = 1$	$\tan 225^\circ = 1$	$\tan\frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$	$\tan\frac{7\pi}{4} = -1$
$\cot 0^\circ =$ tanımsız	$\cot 45^\circ = 1$	$\cot 225^\circ = 1$	$\cot\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cot\frac{7\pi}{4} = -1$

2.



3.

+	$\sin 53^\circ$	−	$\cot(-28^\circ)$	+	$\cos(-25^\circ)$
−	$\cos 222^\circ$	−	$-\sin 124^\circ$	+	$\sec 12^\circ$
+	$\tan 2^\circ$	−	$\mathrm{cosec}\, 312^\circ$		

4.

a) $\sin 172^\circ < \sin 10^\circ < \sin 43^\circ < \sin 75^\circ$

b) $\cos 302^\circ < \cos 24^\circ < \cos 12^\circ < \cos(-2^\circ)$

c) $\cos 178^\circ < \sin 200^\circ < \sin 70^\circ < \cos 15^\circ$

ç) $\cos 70^\circ < \sin 25^\circ < \tan 220^\circ < \cot 40^\circ$

d) $\cos\frac{3\pi}{4} < \sin\frac{\pi}{12} < \tan\frac{\pi}{10} = \cot\frac{3\pi}{4}$

5. Öğrencilerden gelen yanıtlar değerlendirilir.

6. $\cos 350^\circ = \sqrt{1-x^2}$

7. $\mathrm{cosec}\, x$

8. $1 - \sin x \cdot \cos x$

9. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

10. $\left(\dfrac{2a^2}{a^2-1}\right)$

11. $(-2\sin x + \cos x)$

12. $\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$

13. $-2\tan\widehat{C}$

14. $\cos x$

15. $-\dfrac{2}{5}$

16. 1

UYGULAYALIM 1-3

1. $|BC| = 2\sqrt{3}$ cm

2. $x = \sqrt{23}$ cm

3. $|AB| = \sqrt{13}$ cm

4. ≈ 436 m

UYGULAYALIM 1-4

1. $\sin\widehat{C} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

3. $x = 8\sqrt{2}$ cm

4. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

5. $b \approx 5{,}70$ km, $c \approx 9{,}38$ km

6. $\approx 44{,}9$ km

7. $\dfrac{10}{9}$

UYGULAYALIM 1-5

1.

a) $\frac{2\pi}{3}$ **b)** $\frac{\pi}{4}$ **c)** $\frac{\pi}{2}$ **ç)** $\frac{\pi}{3}$

2. 2π

3. Öğrenciden gelen yanıtlar değerlendirilir.

4. E

UYGULAYALIM 1-6

1.

a) $-\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{3\pi}{2}$ **c)** $\frac{\pi}{4}$ **ç)** $\frac{\pi}{4}$

2. $\frac{4}{3}$

3. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. Öğrencilerden gelen yanıtlar değerlendirilir.

5. Öğrencilerden gelen yanıtlar değerlendirilir.

6. $\frac{4}{5}$

7. $-\sqrt{3}$

8. $-\frac{9}{5}$

9. $\frac{3}{2}$

10. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

11. $\frac{\pi}{6}$

1. DEĞERLENDİRME SORULARI CEVAP ANAHTARI

1	D	10	D
2	A	11	B
3	C	12	C
4	B	13	C
5	D	14	A
6	D	15	A
7	E	16	D
8	D	17	B
9	A	18	A

2. ANALİTİK GEOMETRİ

UYGULAYALIM 2-1

1.

$\|AB\| =$	$\sqrt{13}$
$\|BC\| =$	4
$\|CD\| =$	5
$\|DA\| =$	$\sqrt{34}$

2. -6

3. -4

4. 1

5. $\sqrt{58}$

6. 34

UYGULAYALIM 2-2

1. $C(2,0)$

2. $P(-5,7)$

3. $C\left(\frac{27}{2}, \frac{19}{2}\right)$

4.

$A(-1,10), B(3,2)$	$(1,6)$
$C(2,-3), D(-2,5)$	$(0,1)$
$E(0,0), F(-4,2)$	$(-2,1)$
$G(-1,1), H(5,-3)$	$(2,-1)$

5. -7

6. $\sqrt{13}$ br

7.

$A(1,5), B(-1,2), C(6,-1)$	$(2,2)$
$K(0,0), L(-2,-2), M(2,4)$	$\left(0, \frac{2}{3}\right)$
$P(3,3), R(-3,-3), S(3,-3)$	$(1,-1)$

UYGULAYALIM 2-3

1.

$A(-1,2), B(3,-2)$	$m=-1$
$C(0,2), D(-2,0)$	1
$E(-3,-2), F(1,-4)$	$-\frac{1}{2}$
$G(0,0), H(2,2)$	1

2.

$x-2y+3=0$	$m=\frac{1}{2}$	$2y+3=0$	0
$3x+y-2=0$	-3	$x=y-1$	1
$y=3x-1$	3	$2x+3=0$	tanımsız

3.

$A(-1,2), m=3$	$y=3x+5$
$B(3,6), m=-\frac{1}{2}$	$x+2y-15=0$
$C(2,1), m=0$	$y=1$
$D(-2,-2)$, m: tanımsız	$x=-2$

4.

$A(1,-3), \alpha=45°$	$-x+y+4=0$
$B(-2,1), \alpha=30°$	$\sqrt{3}x-3y+3+2\sqrt{3}=0$
$C(-2,-2), \alpha=135°$	$x+y+4=0$
$D(-3,-2), \alpha=0°$	$y+2=0$

5.

$A(1,3), B(-2,1)$	$2x-3y+7=0$
$C(-3,0), D(1,2)$	$x-2y+3=0$
$E(0,0), F(2,2)$	$x-y=0$
$G(1,6), H(2,-1)$	$7x+y-13=0$

6.
a) $x+2y-4=0$ **b)** $2x+3y+6=0$ **c)** $y-3=0$ **ç)** $x+3=0$

7. A

8. C

9.

$x + y - 2 = 0$ $2x - y + 5 = 0$	$(-1, 3)$
$3x - 2y + 5 = 0$ $x + y - 1 = 0$	$\left(-\frac{3}{5}, \frac{8}{5}\right)$

10. $-x + 2y - 4 = 0$

11. $-x + 2y - 7 = 0$

12. $2x + y - 8 = 0$

13. A

14. $3x + 2y + 1 = 0$

UYGULAYALIM 2-4

1. **a)** $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{4\sqrt{13}}{13}$ **c)** $\frac{19\sqrt{13}}{13}$

2. **a)** $2\sqrt{2}$ **b)** $\frac{7}{10}\sqrt{5}$ **c)** $\frac{2}{5}\sqrt{10}$

3. $\frac{10\sqrt{13}}{13}$ br

4. $\left(\frac{-4}{5}, \frac{8}{5}\right)$

5. $\frac{15\sqrt{13}}{26}$ br

2. DEĞERLENDİRME SORULARI CEVAP ANAHTARI

1	C	14	a. $\frac{2}{5}$ b. -3 c. $\frac{-1}{3}$ ç. 0
2	B	15	A
3	C	16	A
4	A	17	C
5	B	18	D
6	D	19	C
7	B	20	C
8	D	21	A
9	A	22	C
10	D	23	C
11	D	24	A
12	A	25	B
13	C		

3. FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR

UYGULAYALIM 3-1

1. **a)** $f(x) = 75x$ **b)** 600 **c)** 5

2. **Fonksiyonun pozitif olduğu aralık:** $(-10,-4), (0,4), (8,12)$

Fonksiyonun negatif olduğu aralık: $(-4,0), (4,8)$

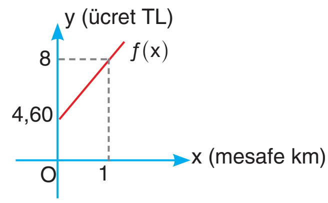
Fonksiyonun artan olduğu aralık: $(-10,-6), (-3,2), (6,12)$

Fonksiyonun azalan olduğu aralık: $(-6,-3), (2,6)$

Fonksiyonun maksimumu: $f(12) = 6$

Fonksiyonun minimumu: $f(-3) = -3$

3. x: mesafe, $f(x)$ ücret olmak üzere $f(x) = 3,40x + 4,60$



4. **a)** 5 **b)** 5

5. 4

6. **a)** $-\frac{2}{3}$ **b)** 0

UYGULAYALIM 3-2

1.

Fonksiyon	Fonksiyonun tepe noktası	Fonksiyonun simetri ekseni
$y = x^2 - 5x + 1$	$\left(\frac{5}{2}, -\frac{21}{4}\right)$	$x = \frac{5}{2}$
$y = -2\cdot(x+1)^2 - 1$	$(-1,-1)$	$x = -1$
$y = 4x^2 - 2x$	$\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$	$x = \frac{1}{4}$
$y = -2x^2 + 1$	$(0,1)$	$x = 0$

2. Öğrencilerden gelen yanıtlar değerlendirilir.

3. 2

4. 2

5. **a)** $y = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} + 3$ **b)** $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$ **c)** $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ **ç)** $y = \frac{1}{4}x^2 - x$

6. $y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

7. $y = \frac{8}{9}x^2 - \frac{16}{3}x + 6$

8. 2 noktada kesişir.

9. $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

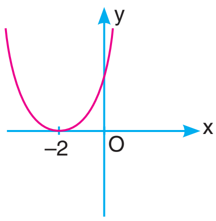
UYGULAYALIM 3-3

1. 5 TL

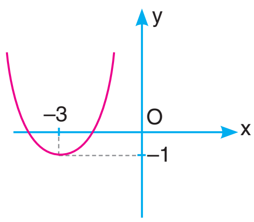
2. 25

UYGULAYALIM 3-4

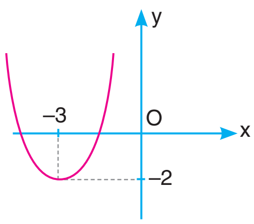
1. D
2. A
3. E
4. **a)**



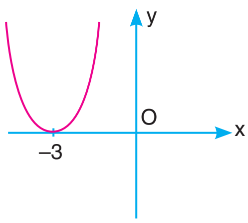
b)



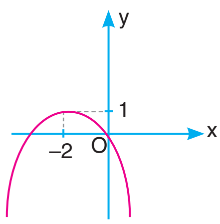
c)



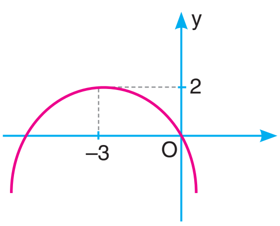
ç)



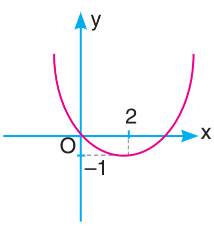
d)



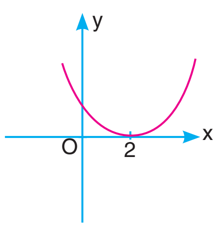
e)



f)



g)



5. -1

6. C

7. C

8. 5

3. DEĞERLENDİRME SORULARI CEVAP ANAHTARI

1	E	14	C
2	D, Y, D, D, Y, D, Y	15	A
3	E	16	D
4	A	17	B
5	D	18	D
6	C	19	B
7	C	20	D
8	D	21	E
9	B	22	C
10	C	23	C
11	B	24	A
12	D	25	D
13	E		

4. DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

UYGULAYALIM 4-1

1. $\{(3,-1),(3,2)\}$

2. $\{(1,-\sqrt{2}),(1,\sqrt{2})\}$

3. $\left\{(-1,2),\left(\frac{13}{7},\frac{4}{7}\right)\right\}$

4. $\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$

5. $\varnothing$

UYGULAYALIM 4-2

1. **a)** $(0,1)$ **b)** $(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$ **c)** $\varnothing$

   ç) $\varnothing$ **d)** $(-\infty,-4)\cup(1,\infty)$ **e)** $[-3,-2]\cup(2,\infty)$

   f) $(-2,-1)\cup(1,2)$ **g)** $(-\infty,1)\cup(2,\infty)-\{3\}$

2. $(4,6)$

3. 3 tane

4. $(-4,1] \cup [2,4)$

5. $(0,1) \cup (2,6)$

6. $(-1,0)$

7. $(-2,-1) \cup (2,3)$

8. $(0,1) \cup (3,5)$

9. $\left(-\infty, -\frac{20}{7}\right] \cup \left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$

4. DEĞERLENDİRME SORULARI CEVAP ANAHTARI

1	E	7	A
2	A	8	D
3	D	9	C
4	B	10	B
5	C	11	D
6	B		

5. ÇEMBER VE DAİRE

UYGULAYALIM 5-1

1. D, Y, D, Y, D

2. 5 cm

3. 9 cm

4. $\sqrt{41}$ cm

5. 6

UYGULAYALIM 5-2

1. **a)** 90° **b)** 30° **c)** 75° **ç)** 50°

   d) 30° **e)** 30°

2. 76°

3. 30°

4. $120°$

5. $110°$

6. $60°$

7. $4\sqrt{2}$

8. $55°$

9. $65°$

UYGULAYALIM 5-3

1. 5

2. $\sqrt{6}$

3. 12

4. $3\sqrt{2}$

UYGULAYALIM 5-4

1. $25\pi cm^2$

2. $6\sqrt{2}$

3. **a)** $\frac{25}{2}\pi\ cm^2$ **b)** $12\pi - 9\sqrt{3}\ cm^2$

c) $65\pi\ cm^2$ **ç)** $64\pi\ cm^2$

4. $24\pi - 36\sqrt{3}$

5. $\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$

6. $72\sqrt{3} - 24\pi$

7. $108 - \frac{45}{2}\pi$

8. $8\pi - 16$

9. 120π

10. $64 - 16\pi$

11. $80 - 17\pi$

12. 8

5. DEĞERLENDİRME SORULARI CEVAP ANAHTARI

1	D	9	A
2	E	10	A
3	A	11	E
4	B	12	D
5	E	13	A
6	E	14	E
7	B	15	C
8	B		

6. UZAY GEOMETRİ

UYGULAYALIM 6-1

1. 56π

2. 9π br^3

3. 8π br^2

4. 128π

5. $(A: 80\pi \text{ br}^2, V: 80\pi \text{ br}^3)$

6. 288π

7. 6 br

8. $2\sqrt{35}$

9. $2\sqrt[3]{26}$ br

10. $(A: 324\pi \text{ br}^2, V: 972\pi \text{ br}^3)$

11. 216 br^3

12. 64

13. 16π

14. $\frac{128}{3}\pi$ br^3

15. $2\sqrt{2}$

16. 75π cm^2

6. DEĞERLENDİRME SORULARI CEVAP ANAHTARI

1	D	7	A
2	B	8	D
3	E	9	C
4	C	10	E
5	D	11	C
6	E	12	A

7. OLASILIK

UYGULAYALIM 7-1

1. $\frac{1}{2}$

2. **a)** $\frac{1}{12}$ **b)** $\frac{7}{12}$ **c)** $\frac{1}{4}$

3. $\frac{1}{5}$

4. $\frac{11}{12}$

5. **a)** $\frac{15}{56}$ **b)** $\frac{3}{28}$ **c)** $\frac{13}{28}$

6. **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{21}$ **c)** $\frac{2}{7}$

7.

$P(A \cap B)$	$\frac{1}{2}$
$P(A \cup B)$	$\frac{11}{12}$
$P(A')$	$\frac{1}{4}$
$P(B')$	$\frac{1}{3}$

8. **a)** $\frac{8}{27}$ **b)** $\frac{1}{27}$ **c)** $\frac{4}{27}$ **ç)** $\frac{4}{9}$

9. **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{18}{25}$

10. **a)** $\frac{25}{42}$ **b)** $\frac{25}{42}$

11. $\frac{3}{7}$

12. $\frac{2}{5}$

13. $\frac{23}{28}$

14. $\frac{3}{5}$

15. $\frac{13}{20}$

16. $\frac{1}{4}$

UYGULAYALIM 7-2

1. $\frac{1}{6}$

2. $\left(\text{Teorik:}\frac{1}{6}, \text{Deneysel:}\frac{1}{3}\right)$

3. $\left(\text{Teorik:}\frac{1}{2}, \text{Deneysel:}\frac{4}{5}\right)$

4. $\left(\text{Teorik:}\frac{1}{6}, \text{Deneysel:}\frac{1}{4}\right)$

5. $\left(\text{Teorik:}\frac{1}{2}, \text{Deneysel:}\frac{9}{10}\right)$

7. DEĞERLENDİRME SORULARI CEVAP ANAHTARI

1	a. $\frac{1}{6}$ b. $\frac{5}{6}$ c. $\frac{5}{36}$ ç. $\frac{1}{2}$ d. 0 e. 1	9	E
2	A	10	E
3	E	11	B
4	D	12	D
5	B	13	E
6	C	14	B
7	E	15	A
8	D		

SÖZLÜK

A

açı : Başlangıç noktası ortak iki ışının birleşimi.

açınım : Bir cismin yüzeylerinin açılıp bir düzlem üzerine yayılması.

açıortay : Bir açıyı eş iki açıya ayıran ışın.

analitik düzlem : Üzerine koordinat sistemi yerleştirilmiş düzlem.

apsis : Koordinat sistemindeki bir noktanın yatay eksenli bileşeni.

apsisler ekseni : Koordinat sistemini oluşturan yatay eksen.

ayrıt : İki düzlemin arakesiti.

B

bağımlı olay : Bir olayın gerçekleşme olasılığının başka bir olaya bağlı olması durumu.

bağımsız olay : Bir olayın gerçekleşme olasılığının başka bir olaya bağlı olmaması durumu.

basit olay : Bir tek çıktısı olan ve kendisinden başka olaylara ayrıştırılamayan olaylar.

bileşik olay : Birden fazla basit olaydan oluşan olaylar.

birim : Bir çokluğu oluşturan varlıkların her biri, ünite.

birim çember : Yarıçapının uzunluğu bir birim olan ve merkezi orijinde bulunan çember.

boş küme : Hiç elemanı olmayan küme.

Ç

çakışık doğrular : Bütün noktaları ortak olan doğrular.

çarpan : Cebirsel ifadede çarpım durumundaki her bir terim.

çember : Merkez denilen sabit bir noktadan aynı uzaklık ve düzlemdeki noktalar kümesinin oluşturduğu kapalı eğri.

çıktı : 1. Bir olaydaki olası sonuçlar. 2. Bir olasılık deneyinde, karşılaşması mümkün olan olaylardan her birisi.

D

deney : Olasılık hesabında çıktıları elde etmek için yapılan denemelerin her biri.

denklem : İçinde yer alan bazı niceliklere uygun bir değer verildiğinde sağlanan eşitlik.

denklem sistemi : İki veya daha çok denklemden oluşan ve hepsinin birlikte ortak çözümü istenen takım.

diskriminant : $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\triangle = b^2 - 4ac$ sayısı.

doğal sayılar : $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ kümesinin elemanları.

E

eğim : Bir yüzeyin yatay düzleme doğru eğilmesi, eğiklik.

eksen : Koordinat sistemini oluşturan sayı doğrularından her biri.

eşitsizlik : Birden fazla çokluğun eşit olmaması durumu.

G

gerçek sayılar : Doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümesinin hepsini kapsayan kümenin elemanları.

H

hacim : Bir cismin uzayda kapladığı boşluk.

hipotenüs : Bir dik üçgende dik açının karşısındaki kenar.

I

ışın : Bir noktadan çıkıp sonsuza giden yarım doğru.

İ

imkânsız olay : Gerçekleşme olasılığı olmayan olay.

irrasyonel sayılar : Rasyonel olmayan (devirli ondalık açılımları olmayan) sayılar.

istatistik : Gözlem ve araştırmalar sonucu düzenli olarak elde edilen bilgilerin sayılarla veya şekillerle ifade edilmesi.

K

kesen : Bir çemberi farklı iki noktada kesen doğru.

kesin olay : Olma olasılığı 1 olan olay.

kiriş : Bir çemberin iki noktasını birleştiren doğru parçası.

M

maliyet : Üretimde bir mal elde edilinceye değin harcanan değerlerin toplamı.

mutlak değer : Sayı doğrusu üzerinde sayının orijine olan uzaklığı.

N

negatif yön : Bir çemberde saatin dönme yönü.

O

olasılık : Bir şeyin olabilmesi durumu, olabilirlik, ihtimal.

olay : Örnek uzayın her alt kümesi.

ordinat : Koordinat sistemindeki bir noktanın dikey eksenli bileşeni.

ordinat bir ekseni : Koordinat sistemini oluşturan dikey eksen.

orijin : Koordinat sisteminin başlangıç noktası.

Ö

örnek uzay : Bir olasılık deneyinde tüm sonuçların kümesi.

özdeşlik : İki yanı birbirinin aynı olan veya harflerle verilen sayısal değerler ne olursa olsun iki yanı da sayıca eşit değerler alan eşitlik.

P

parabol : İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği.

periyot : Belirli aralıklarla sürekli tekrar etme.

permütasyon : Bir küme elemanlarının belli bir sıraya göre dizilişlerinin her biri.

pozitif yön : Bir çember üzerinde, saatin dönme yönünün tersi.

R

radyan : Bir tam çemberin 1 birim uzunluğundaki yayını gören merkez açının ölçüsü.

S

sıralı ikili : a ve b gibi iki elemanın öncelik sırasına göre (a, b) biçiminde yazılarak elde edilen (a, b) ikilisi.

simetri : Eksen olarak alınan bir doğrudan, benzer noktaları karşılıklı olarak aynı uzaklıkta bulunan iki benzer parçanın birbirine göre durumu.

T

tam sayılar : $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ kümesinin elemanları.

teğet : Bir eğriye bir noktada değen doğru.

teorem : Doğruluğu kanıtlanabilen önerme.

Ü

üçgen : Düzlemde birbiriyle doğrusal olmayan üç noktayı birleştiren doğru parçalarının birleşimi.

Y

yansıma : Doğruya göre simetri.

yay : Bir çember üzerindeki iki nokta ile bu noktalar arasındaki çember parçası.

yönlü açı : Bir kenarı başlangıç (sabit), diğer kenarı bitim (hareketli) olarak düşünülen açı.

KAYNAKÇA

Altun, Murat. *Liselerde Matematik Öğretimi*. İstanbul: Alfa Aktüel Yayınları, 2009.

Brown, Richard G. *Advanced Mathematics*. Boston: McDougal Littell, 1994.

Foresman, Scott. *Exploring Mathematics*. USA: Foresman Scott and Company, 1994.

Sertöz, Sinan. *Matematiğin Aydınlık Dünyası*. Ankara: TÜBİTAK Yayınları Popüler Bilim Kitapları, 2012.

T.C. Milli Eğitim Bakanlığı Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. Ankara: 2018.

Türkçe Sözlük. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları, 2011.

Yazım Kılavuzu. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları, 2012.

GÖRSEL KAYNAKÇA

www.shutterstock.com (Telif hakkı ödenerek satın alınmıştır.)

Yayınevi arşivi

Kitapta kullanılan resimlemeler, yayınevi görsel tasarım uzmanı tarafından hazırlanmıştır.

Sayfa 12	www.shutterstock.com 1043573053 – 1065579116 – 1029243295
Sayfa 17	Yayınevi arşivi
Sayfa 51	Yayınevi arşivi
Sayfa 75	www.shutterstock.com 81659851
Sayfa 122	Yayınevi arşivi
Sayfa 125	www.shutterstock.com 1076244845
Sayfa 160	Yayınevi arşivi
Sayfa 161	Yayınevi arşivi
Sayfa 162	Yayınevi arşivi
Sayfa 180	Yayınevi arşivi
Sayfa 198	www.shutterstock.com 66423961
Sayfa 239	Yayınevi arşivi
Sayfa 241	Yayınevi arşivi
Sayfa 266	Yayınevi arşivi
Sayfa 270	www.shutterstock.com 102390643
Sayfa 271	Yayınevi arşivi
Sayfa 271	Yayınevi arşivi
Sayfa 277	Yayınevi arşivi
Sayfa 278	Yayınevi arşivi
Sayfa 283	Yayınevi arşivi

SEMBOLLER VE GÖSTERİMLER

$=$	Eşit
$\neq$	Eşit değil
$\in$	Eleman
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\varnothing$, $\{\ \}$	Boş küme
$f: A \rightarrow B$	A dan B ye f fonksiyonu
G	Ağırlık merkezi
$[a, b]$	a, b kapalı aralığı
(a, b)	a, b açık aralığı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^{+}$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^{-}$	Negatif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}'$	İrrasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	Pozitif gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{-}$	Negatif gerçek sayılar kümesi
$\sqrt{\ }$	Karekök
$\sqrt[n]{\ }$	n inci dereceden kök
$<$	Küçük
$\leq$	Küçük veya eşit
$>$	Büyük
$\geq$	Büyük veya eşit
$\lvert x \rvert$	x in mutlak değeri
$s(A)$	A kümesinin eleman sayısı
$\sim$	Benzerlik
h_a	a kenarına ait yükseklik
$P(A)$	A olayının olasılığı
$P(A \mid B)$	A nın B ye bağlı olasılığı
$P(A \cap B)$	A ve B nin olasılığı
$P(A \cup B)$	A veya B nin olasılığı
$A(x, y)$	Koordinatları x ve y olan A noktası
$\lvert AB \rvert$	A ve B noktaları arasındaki uzaklık
$\triangle$	Diskriminant
r	Yarıçap
R	Çap
$\overset{\frown}{AB}$	AB yayı
$\overset{\frown}{ABC}$	ABC yayı
$m(\overset{\frown}{AB})$	AB yayının ölçüsü
$\widehat{A}$	A açısı
$m(\widehat{A})$	A açısının ölçüsü
$\widehat{ABC}$	ABC açısı
$\overset{\triangle}{ABC}$	ABC üçgeni
cosx	x in kosinüsü
sinx	x in sinüsü
tanx	x in tanjantı
cotx	x in kotanjantı
[KA	KA ışını
//	Paralel
$\perp$	Dik
%	Yüzde
kg	Kilogram
m	Metre
cm	Santimetre
cm^2	Santimetrekare
br	Birim
br^2	Birimkare
sn.	Saniye
km	Kilometre
km/sa.	Kilometre/saat
m/sn.	Metre/saniye